Devoir surveillé n°6

PTSI B Lycée Eiffel

15 février 2013

Durée : 2H45. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier la fonction f_n sur son domaine de définition (variations et limites).
   (b) Déterminer la position relative des courbes représentatives des fonctions f_n.
   (c) Tracer dans un même repère une allure rapide des courbes représentatives de f_1, f_2 et f_3.
   (d) Expliquer pourquoi, si $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n (u_n étant la plus petite des deux), et qui vérifient $0 < u_n < n < v_n$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $u_n \in]1; e[$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, en déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n).
   (c) En utilisant un encadrement de $\ln(u_n)$, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$, en déduire un équivalent simple de $u_n - 1$.
3. (a) Déterminer la limite de la suite (v_n).
   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$, en déduire que $n\ln(n) < v_n$.
   (c) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis que $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.
   (e) En déduire un équivalent simple de $\ln(v_n)$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $n+1$ polynômes de degré n en posant $\forall k \in \{0;\dots;n\}$, $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$. On identifiera systématiquement les polynômes et les fonctions polynômiales associées.

1. Que valent les polynômes $B_{3,k}$ pour les différentes valeurs de k pour lesquelles ils sont définis ?
2. Étudier rapidement les polynômes $B_{3,k}$ sur l'intervalle $[0,1]$, et tracer une allure de leurs courbes représentatives sur ce même intervalle.
3. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=3} B_{3,k}$? Généraliser ce résultat, et en déduire que $\forall x \in [0,1]$, $B_{n,k}(x) \in [0,1]$ (quelles que soient les valeurs de n et de k).
4. Exprimer le polynôme dérivé $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1;k-1}$ et de $B_{n-1,k}$.
5. On définit une application φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$. Montrer que φ est un endomorphisme de groupes de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Déterminer le noyau de φ. Que peut-on en déduire ?
7. On pose $f(x) = x$, et on note f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$. Montrer que, $\forall x \in [0;1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
8. Effectuer la même démonstration qu'à la question précédente en prenant cette fois-ci $f(x) = x^2$.

Exercice 3

On cherche dans cet exercice à étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \ln(n) - \ln(n-1)$.
3. En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
4. En déduire la nature et un équivalent simple de la suite (u_n).
5. On pose $v_n = u_n - \ln(n)$. Montrer que la suite (v_n) converge (on ne cherchera pas à déterminer sa limite), et en déduire qu'on peut écrire $u_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.
6. On pose désormais $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   (a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire la nature de la suite (S_n).
   (b) Montrer que $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.
   (c) En utilisant le résultat de la question 5, déterminer la limite l de la suite (S_n).
   (d) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $|S_n - l| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.