Devoir commun de mathématiques : corrigé

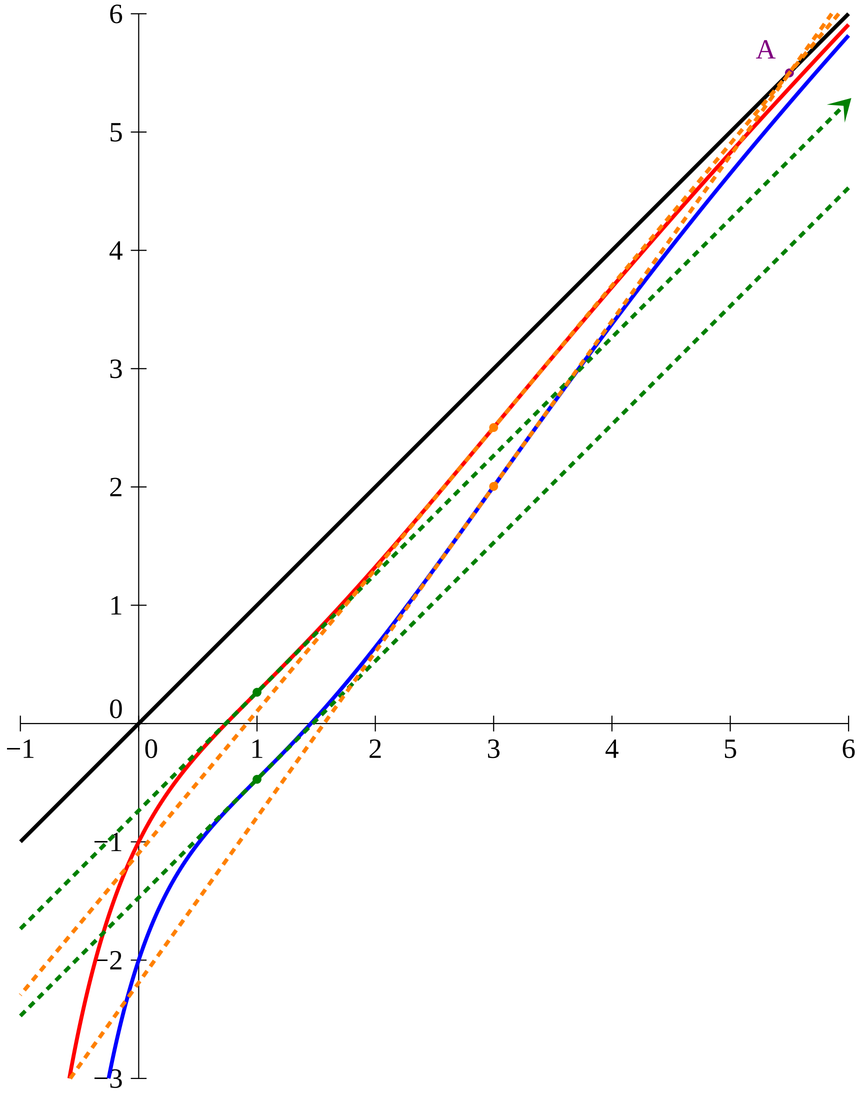
PTSI A et B Lycée Eiffel

26 janvier 2013

Exercice 1

1. Considérons donc une fonction de la forme $y(x) = ax+b$. Dans ce cas $y'(x) = a$, et $(1+x^2)y' + (x-1)^2y = a(1+x^2) + (x^2-2x+1)(ax+b) = a + ax^2 + ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b = ax^3 + (b-a)x^2 + (a-2b)x + a + b$. Par identification des coefficients, la fonction est donc solution de l'équation (E) si $a = 1$; $b - a = -1$; $a - 2b = 1$ et $a + b = 1$. Il suffit donc de prendre $a = 1$ et $b = 0$. Autrement dit, la fonction $y : x \mapsto x$ est solution particulière de (E).
2. En effet, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = (1+x^2) - 2x$, donc $\dfrac{(x-1)^2}{2x} = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2}$ a pour primitive $x \mapsto x - \ln(1+x^2)$. L'équation homogène normalisée associée à l'équation (E) pouvant s'écrire $y' + \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}y = 0$, elle admet pour solutions toutes les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-x+\ln(1+x^2)} = Ke^{-x}(1+x^2)$, où $K \in \mathbb{R}$. Notons qu'ici, comme $1+x^2$ ne s'annule jamais, la normalisation ne pose aucun problème, on peut résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Puisqu'on a déjà déterminé plus haut une solution particulière de l'équation (E), les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme $x \mapsto x + Ke^{-x}(1+x^2)$.
3. Dans la forme obtenue à la question précédente, on a $y(0) = K$. Il suffit donc de poser $k = K$, et on trouve bien une solution y_k ayant l'équation annoncée.
4. Deux possibilités pour faire ce calcul. On peut dériver simplement la fonction y_k pour obtenir $y_k'(x) = 1 - ke^{-x}(1+x^2) + 2kxe^{-x} = 1 - ke^{-x}(1+x^2-2x) = 1 - ke^{-x}(x-1)^2$. Pour $x = 1$, on trouve $y_k'(1) = 1$, qui est indépendant de k. Toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent donc en 1 des tangentes de même pente, qui sont parallèles. Autre façon de présenter le calcul : on remplace x par 1 dans l'équation (E) pour obtenir $2y'(1) + 0y(1) = 1 - 1 + 1 + 1$, soit $y'(1) = 1$. La conclusion est évidemment la même.
5. Dérivons une deuxième fois la fonction y_k, on trouve $y_k''(x) = ke^{-x}(x-1)^2 - ke^{-x}(2x-2) = ke^{-x}(x^2 - 2x + 1 - 2x + 2) = ke^{-x}(x^2 - 4x + 3)$. La courbe admet donc un point d'inflexion d'abscisse x si x est solution de l'équation du second degré $x^2 - 4x + 3 = 0$. Cette condition est effectivement indépendante de la valeur de k, le trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. Toutes les courbes ont donc deux points d'inflexion d'abscisses 1 et 3.
6. Comme $y_k'(3) = 1 - 4ke^{-3}$ et $y_k(3) = 3 + 10ke^{-3}$, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ en 3 a pour équation $y = (1 - 4ke^{-3})(x-3) + 3 + 10ke^{-3}$. En remplaçant x par $\dfrac{11}{2}$, ou si on préfère $x - 3$ par $\dfrac{5}{2}$, on obtient $y = \dfrac{5}{2} - 10ke^{-3} + 3 + 10ke^{-3} = \dfrac{11}{2}$, ce qui prouve bien que la tangente passe toujours par le point A.
7. Il suffit de constater que $y_k(x) - x = ke^{-x}(1+x^2)$, qui a pour limite 0 en $+\infty$ par croissance comparée. La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote oblique à toutes les courbes en $+\infty$ (et coïncide accessoirement avec la courbe $\mathcal{C}_0$). Comme $e^{-x}(1+x^2)$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$, le signe de $y_k(x) - x$ est simplement celui de k. Les courbes sont donc toujours au-dessus de l'asymptote lorsque $k > 0$, toujours en-dessous lorsque $k < 0$.

8. Dans ce cas, $ke^{-x}(x-1)^2$ est toujours négatif, donc $y_k'(x) = 1 - ke^{-x}(x-1)^2$ est strictement positif. La fonction y_k est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La limite de y_k en $+\infty$ vaut toujours $+\infty$. De l'autre côté, $\lim\limits_{x\to-\infty} ke^{-x}(1+x^2) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} y_k(x) = -\infty$ (on peut également obtenir cette limite en utilisant que $y_k(x) \leqslant x$ pour $k \leqslant 0$). Pour compléter les courbes, on calcule $y_k(1) = 1 + \dfrac{2k}{e}$, ce qui donne $y_{-1}(1) = 1 - \dfrac{2}{e} \simeq 0.26$ et $y_{-2}(1) = 1 - \dfrac{4}{e} \simeq -0.48$. Puisqu'on souhaite tracer les tangentes en 3, calculons également en reprenant les résultats obtenus à la question 3 : $y_{-1}(3) = 3 - 10e^{-3} \simeq 2.5$, et $y_{-2}(3) = 3 - 20e^{-3} \simeq 2$. Inutile de calculer les pentes des tangentes, le fait qu'elles passent par le point A suffit à les tracer. On obtient le graphique suivant (asymptote en noir, $\mathcal{C}_{-1}$ en rouge, $\mathcal{C}_{-2}$ en bleu et tangentes en 3 en pointillés orange, celles en 1 en pointillés verts) :



Exercice 2

A. Étude de la courbe γ (appelée tractrice).

1. Notons déjà que les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ (le ch au dénominateur ne s'annule jamais). La fonction ch étant paire et la fonction th étant impaire, les fonctions x et y sont respectivement imapire et paire. La courbe γ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et une étude sur $\mathbb{R}_+$, suivie de cette symétrie, suffit à obtenir l'intégralité de la

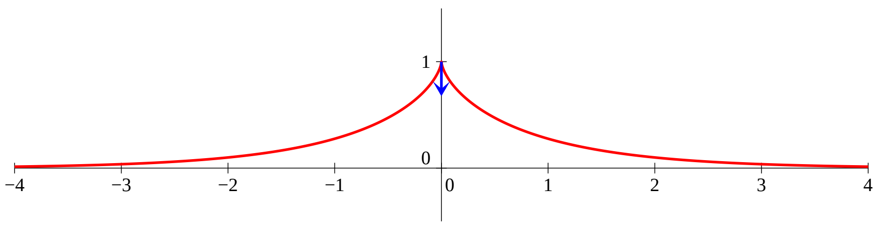
courbe.

2. On peut par exemple calculer $x'(t) = 1 - (1 - \text{th}^2(t)) = \text{th}^2(t) \geqslant 0$, et $y'(t) = -\dfrac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)} \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction x est donc croissante, et la fonction y décroissante.
3. Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} \text{th}(t) = 1$, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \text{ch}(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0^+$.
4. Pour compléter le tableau, il ne reste plus qu'à calculer $x(0) = 0 - \text{th}(0) = 0$, et $y(0) = \dfrac{1}{\text{ch}(0)} = 1$.

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	0

5. Il y a bien un point stationnaire quand $t = 0$ puisque les deux dérivées s'annulent simultanément. Première méthode pour déterminer le vecteur tangente en ce point, on calcule les dérivées secondes : $x''(t) = 2\,\text{th}(t)(1 - \text{th}^2(t))$, qui s'annule en 0 ; et $y''(t) = \dfrac{-\text{ch}^3(t) + 2\,\text{sh}^2(t)\,\text{ch}(t)}{\text{ch}^4(t)}$, qui vaut -1 en 0. Il y a donc au point $M(0)$ une tangente dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(0, -1)$, autrement dit verticale dirigée vers le bas.

   Deuxième méthode, on calcule $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)\,\text{th}^2(t)} = -\dfrac{1}{\text{sh}(t)}$, qui tend vers $-\infty$ quand t tend vers 0. On retrouve une tangente verticale dirigée vers le bas. Notons que le point stationnaire sera ici un point de rebroussement de première espèce.
6. Voici une allure de la courbe :



B. Une propriété remarquable de la tractrice.

1. Au vu des calculs de la première partie, un tel vecteur sera $\left(\text{th}^2(t), -\dfrac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)}\right)$, ou encore en multipliant tout par $\dfrac{\text{ch}^2(t)}{\text{sh}(t)}$, le vecteur plus simple $(\text{sh}(t), -1)$.
2. La tangente a donc une équation de la forme $x + \text{sh}(t)y + c = 0$, et doit passer par le point $M(t)$. Cela donne pour la constante c la condition $t - \text{th}(t) + \dfrac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)} + c = 0$, soit $t + c = 0$. Autrement dit, $t = -c$, ce qui donne bien l'équation annoncée.

3. Pour $t=0$, comme $\mathrm{sh}(0)=0$, l'équation précédente devient $x=0$, ce qui correspond à l'axe des ordonnées qui est bien tangente à la courbe en son point stationnaire.
4. Puisque $M(0)$ a pour coordonnées $(0,1)$, cette distance vaut 1.
5. Remplaçons y par 0 dans l'équation de la tangente, on obtient $x=t$. La tangente coupe donc l'axe des abscisses au point $P(t)(t,0)$.
6. On a donc $M(t)P(t)^2=(t-\mathrm{th}(t)-t)^2+\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}=\mathrm{th}^2(t)+1-\mathrm{th}^2(t)=1$. Cette distance est constante. Cette constatation est à l'origine d'une méthode de tracé de la courbe tractrice (et de son nom) : elle est obtenu en « tirant » un objet initialement placé au point $(0,1)$ par une ficelle de longueur 1 à laquelle on fait parcourir l'axe des abscisses.

C. Rayon de courbure de la tractrice.

1. On a calculé plus haut $x''(t)=2\,\mathrm{th}(t)(1-\mathrm{th}^2(t))=\dfrac{2\,\mathrm{th}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}$, et $y''(t)=\dfrac{2\,\mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{ch}(t)-\mathrm{ch}^3(t)}{\mathrm{ch}^4(t)}=\dfrac{2\,\mathrm{sh}^2(t)-\mathrm{ch}^2(t)}{\mathrm{ch}^3(t)}=\dfrac{\mathrm{sh}^2(t)-1}{\mathrm{ch}^3(t)}$. On peut donc calculer $\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt},\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)=x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)=\dfrac{\mathrm{th}^2(t)(\mathrm{sh}^2(t)-1)}{\mathrm{ch}^3(t)}+\dfrac{2\,\mathrm{th}(t)\,\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^4(t)}=\dfrac{\mathrm{sh}^4(t)-\mathrm{sh}^2(t)+2\,\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^5(t)}=\dfrac{\mathrm{sh}^2(t)(\mathrm{sh}^2(t)+1)}{\mathrm{ch}^5(t)}=\dfrac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^3(t)}$. Cette expression ne s'annule effectivement jamais lorsque $t\neq 0$, tous les points non stationnaires de la courbe sont donc biréguliers.
2. Calculons le numérateur, qui vaut $(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}=\left(\mathrm{th}^4(t)+\dfrac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^4(t)}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{\mathrm{sh}^2(t)(\mathrm{sh}^2(t)+1)}{\mathrm{ch}^4(t)}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{\mathrm{sh}^3(t)}{\mathrm{ch}^3(t)}=\mathrm{th}^3(t)$. On en déduit que le rayon de courbure vaut $\dfrac{\mathrm{sh}^3(t)}{\mathrm{ch}^3(t)}\times\dfrac{\mathrm{ch}^3(t)}{\mathrm{sh}^2(t)}=\mathrm{sh}(t)$.

Problème

A. Quelques cas particuliers.

1. Pour $n=1$, on a $S_1(z)=1+z^2$, donc $S_1(1+i)=1+(1+i)^2=1+1+2i-1=1+2i$. Pour $n=2$, $S_2(z)=1+z^2+z^4$. Comme $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^4=(2i)^2=-4$, et $S_2(1+i)=2i-3$.
2. Notons $z=e^{i\theta}$, dans ce cas $\bar{z}=e^{-i\theta}$ et $z^2=e^{2i\theta}$, donc $\bar{z}S_1(z)=e^{-i\theta}(1+e^{2i\theta})=e^{-i\theta}+e^{i\theta}=2\cos(\theta)\in\mathbb{R}$ (il existe de nombreuses autres façons de présenter le calcul, le recours à la forme exponentielles n'est pas du tout nécessaire). La réciproque est éviodemment fausse : si $z\in\mathbb{R}$, alors $S_1(z)\in\mathbb{R}$ et on n'a pas nécessairement $|z|=1$ (on peut prouver que ce sont les seuls cas possibles).
3. On peut par exemple calculer $S_1(j)=1+e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{\frac{2i\pi}{3}}(e^{\frac{-2i\pi}{3}}+e^{\frac{2i\pi}{3}})=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)e^{\frac{2i\pi}{3}}=-e^{\frac{2i\pi}{3}}=e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Ce nombre a pour module 1, et pour argument $-\dfrac{\pi}{3}$.
4. L'initialisation est évidente : $S_0(j)=1$ puisque $S_0(z)=1$ quel que soit le nombre complexe z. Supposons désormais que $S_{3n}(j)=1$ pour un certin entier n, alors $S_{3(n+1)}(j)=S_{3n+3}(j)=S_{3n}(j)+j^{6n+2}+j^{6n+4}+j^{6n+6}=1+j^{6n+2}(1+j^2+j^4)$. Or, $1+j^2+j^4=1+e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{\frac{4i\pi}{3}}=1+e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{-\frac{2i\pi}{3}}=1+2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=0$. On trouve bien $S_{3n+3}(j)=1$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et, par application du principe de récurrence, pour tous les entiers naturels n.
5. Puisqu'on a toujours $1^{2k}=1$, $S_n(1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}1=n+1$. De même pour $z=-1$ (les puissances paires de -1 sont également toutes égales à -1).

B. Étude du cas général.

1. On reconnait dans S_n une somme géométrique de raison z^2, raison qui sera différente de 1 lorsque z est différent de 1 ou -1. On peut donc écrire $S_n(z) = \dfrac{1-(z^2)^{n+1}}{1-z^2} = \dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}$.
2. Les solutions de l'équation $S_n(z) = 0$ sont donc les racines $(2n+2)$-èmes de l'unité, 1 et -1 exclus, autrement dit les complexes de la forme $z^{\frac{2ik\pi}{2n+2}}$, pour $k \in \{1; \dots ; 2n+1\} \backslash \{n+1\}$. La somme de toutes les racines $(2n+2)$-èmes de l'unité étant nulle, la somme des solutions vaudra 0 puisqu'on a simplement supprimé deux racines dont la somme est nulle.
3. (a) Il suffit de constater que $S_n(z) - \dfrac{1}{1-z^2} = \dfrac{-z^{2n+2}}{1-z^2}$, et prendre le module de ce quotient : $|-z^{2n+2}| = |z|^{2n+2} = r^{2n+2}$.

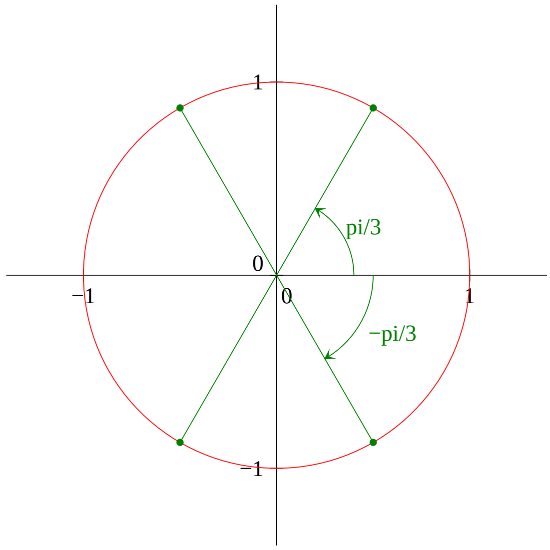
   (b) L'inégalité triangulaire nous permet d'affirmer que $|1|-|z^2| \leqslant |1-z^2|$, soit $1-r^2 \leqslant |1-z^2|$. Comme r est supposé strictement inférieur à 1, $1-r^2 > 0$ et on peut passer à l'inverse pour obtenir $\dfrac{1}{|1-z^2|} \leqslant \dfrac{1}{1-r^2}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par r^{2n+2} pour obtenir la majoration souhaitée.

   (c) Le numérateur du membre de droite de l'inégalité précédente est une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1, dont a pour limite 0. Par application du théorème des gendarmes, le membre de gauche qui est positif tend donc lui aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

C. Autour d'une fonction de la variable complexe ...

1. C'est à peu près immédiat : $f(\bar{z}) = \dfrac{1}{1-\bar{z}^2}$, et $\overline{f(z)} = \dfrac{\bar{1}}{\overline{1-z^2}} = \dfrac{1}{1-\bar{z}^2}$.
2. Cette équation se ramène à $e^{i\frac{\pi}{4}}(1-z^2) = 2z$, soit en multipliant tous les coefficients par $\sqrt{2}$, $(1+i)z^2 + 2\sqrt{2}z - 1 - i = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 8 + 4(1+i)^2 = 8(1+i) = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Une racine carrée de Δ est donc $\delta = \sqrt{8\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$, et l'équation admet deux solutions $z_1 = \dfrac{\delta - 2\sqrt{2}}{2+2i}$, et $z_2 = \dfrac{-\delta - 2\sqrt{2}}{2+2i}$.
3. En effet, $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |1-z^2| = \dfrac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow |(1-z)(1+z)| = 1 \Leftrightarrow |1-z| \times |1+z| = 1$. Comme $AM = |1-z|$ et $BM = |-1-z| = |1+z|$, l'équivalence demandée en découle.
4. (a) On calcule $f(z) = \dfrac{1}{1-e^{2i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})} = \dfrac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(\theta)}{2\sin(\theta)}i = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\tan(\theta)}i$

   (b) On veut $|f(z)|^2 = 1$, soit $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4\tan^2(\theta)} = 1$, soit $4\tan^2(\theta) = \dfrac{4}{3}$, donc $\tan(\theta) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ces valeurs correspondent à $\theta \equiv \dfrac{\pi}{3}[\pi]$ et $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{3}[\pi]$ (ce qui fait quatre points sur le cercle trigonométrique.



5. (a) On a déjà fait un calcul très approchant dans la partie précédente : par inégalité triangulaire, $|z^2| - |1| \leqslant |z^2 - 1|$, donc $|1 - z^2| = |z^2 - 1| \geqslant r^2 - 1 > 0$ vu l'hypothèse faite sur r. En passant à l'inverse, on obtient immédiatement $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{r^2 - 1}$.

   (b) La question précédente prouve qu'on a alors $|f(z)|$ qui tend vers 0 (encore un coup du théorème des gendarmes avec un module positif). Autrement dit, le point P se rapproche de l'origine du repère.