Devoir commun de mathématiques

PTSI A et B Lycée Eiffel

26 janvier 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$.

1. Déterminer une fonction affine solution particulière de (E).
2. En constatant que $(x-1)^2 = (1+x^2) - 2x$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$. En déduire les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (E), puis toutes les solutions de l'équation (E).
3. Soit k un réel quelconque. Montrer qu'il existe une unique solution y_k de l'équation vérifiant $y_k(0) = k$, et vérifier que $y_k(x) = x + ke^{-x}(1+x^2)$. On notera désormais $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k.
4. Calculer $y'_k(1)$. Que peut-on en déduire pour les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 1 ?
5. Montrer que, pour $k \neq 0$, toutes les fonctions y_k ont deux points d'inflexion dont les abscisses ne dépendent pas de la valeur de k.
6. Montrer que toutes les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 3 sont coucourantes au point $A\left(\dfrac{11}{2} ; \dfrac{11}{2}\right)$.
7. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une même asymptote oblique en $+\infty$, et déterminer (en fonction de k) la position de la courbe par rapport à son asymptote.
8. Déterminer les variations de y_k dans le cas où $k \leqslant 0$. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_{-1}$ et $\mathcal{C}_{-2}$, ainsi que leurs tangentes en 1 et en 3 (en exploitant les calculs des questions précédentes). On rappellera également les valeurs des fonctions correspondantes en 0. On donne $e^{-1} \simeq 0,37$, et $e^{-3} \simeq 0,05$

Exercice 2

On se place dans cet exercice dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et on considère la courbe γ paramétrée par $\begin{cases} x(t) & = & t - \mathrm{th}(t) \\ y(t) & = & \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \end{cases}$ (pour $t \in \mathbb{R}$). On notera $M(t)$ le point de γ de coordonnées $(x(t), y(t))$.

A. Étude de la courbe γ (appelée tractrice).

1. Montrer que γ admet un axe de symétrie et qu'on peut réduire l'étude de la courbe à $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier les variations de x et de y sur $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer les limites de x et de y en $+\infty$.
4. Construire le tableau de variations commun de x et y.
5. Montrer que γ admet un point stationnaire, et déterminer la tangente en ce point.
6. Construire la courbe γ dans son intégralité (on donne $x(1) \simeq 0,24$ et $y(1) \simeq 0,65$).

B. Une propriété remarquable de la tractrice.

1. Pour tout réel t non nul, déterminer un vecteur directeur de la tangente à γ en $M(t)$.
2. En déduire que, pour tout t non nul, une équation de la tangente (T) à γ en $M(t)$ est $x + \mathrm{sh}(t)y - t = 0$.
3. Vérifier que cette équation convient encore lorsque $t = 0$.
4. Déterminer la distance $OM(0)$.
5. Soit t un réel non nul. Montrer que (T) admet un unique point d'intersection $P(t)$ avec l'axe (Ox), dont on déterminera les coordonnées.
6. Pour tout t non nul, calculer la distance $M(t)P(t)$. Que peut-on en déduire ?

C. Rayon de courbure de la tractrice.

On appelle point birégulier d'une courbe paramétrée tout point $M(t)$ de la courbe pour lequel $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ sont non colinéaires. En un tel point, le rayon de courbure de la courbe est donné par la formule $R = \dfrac{\left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|^3}{\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)}$.

1. Montrer que pour tout t non nul le point $M(t)$ de la tractrice est un point birégulier.
2. Calculer le rayon de courbure de la tractrice en son point $M(t)$ (pour t non nul).

Problème

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct. On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe -1. On rappelle que le nombre complexe j est défini par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour tout entier naturel n et tout nombre complexe z, on pose $S_n(z) = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n}$.

A. Quelques cas particuliers.

1. Exprimer $S_n(z)$ et calculer $S_n(1+i)$ lorsque $n = 1$, puis $n = 2$.
2. Montrer que, si z est un nombre complexe de module 1, alors $\bar{z}S_1(z)$ est un nombre réel. La réciproque est-elle vraie ?
3. Donner le module et l'argument de $S_1(j)$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $S_{3n}(j) = 1$.
5. Calculer $S_n(z)$ lorsque $z = 1$ ou $z = -1$.

B. Étude du cas général.

Dans cette partie on suppose que z est distinct de 1 et de -1.

1. Montrer que, pour tout entier n, on a $S_n(z) = \dfrac{1 - z^{2n+2}}{1 - z^2}$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $S_n(z) = 0$ puis la valeur de la somme de ces solutions.
3. Soit z un nombre complexe de module r strictement inférieur à 1.
   (a) Montrer que, pour tout entier n, on a $\left| S_n(z) - \dfrac{1}{1 - z^2} \right| = \dfrac{r^{2n+2}}{|1 - z^2|}$.
   (b) En déduire, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que $\left| S_n(z) - \dfrac{1}{1 - z^2} \right| \leqslant \dfrac{r^{2n+2}}{1 - r^2}$.
   (c) Calculer la limite de $\left| S_n(z) - \dfrac{1}{1 - z^2} \right|$ quand n tend vers $+\infty$.

C. Autour d'une fonction de la variable complexe ...

Pour tout nombre complexe distinct de 1 et de -1, on pose $f(z) = \dfrac{1}{1 - z^2}$.

1. Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
2. Résoudre l'équation $f(z) = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2z}$ (on ne cherchera pas à donner les solutions sous forme alébrique ou trigonométrique).
3. On note M le point d'affixe z. Montrer que $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow AM.BM = 1$.
4. Soit z un nombre complexe de module 1 distinct de 1 et -1. On note $z = e^{i\theta}$.
   (a) Montrer que $f(z) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\tan(\theta)} i$.
   (b) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $|f(z)| = 1$? Représenter les points M correspondants.
5. Dans cette question z désigne un nombre complexe de module r strictement supérieur à 1.
   (a) Montrer que $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{r^2 - 1}$.
   (b) On note P le point d'affixe $f(z)$. Que peut-on dire de la position du point P lorsque r tend vers $+\infty$?