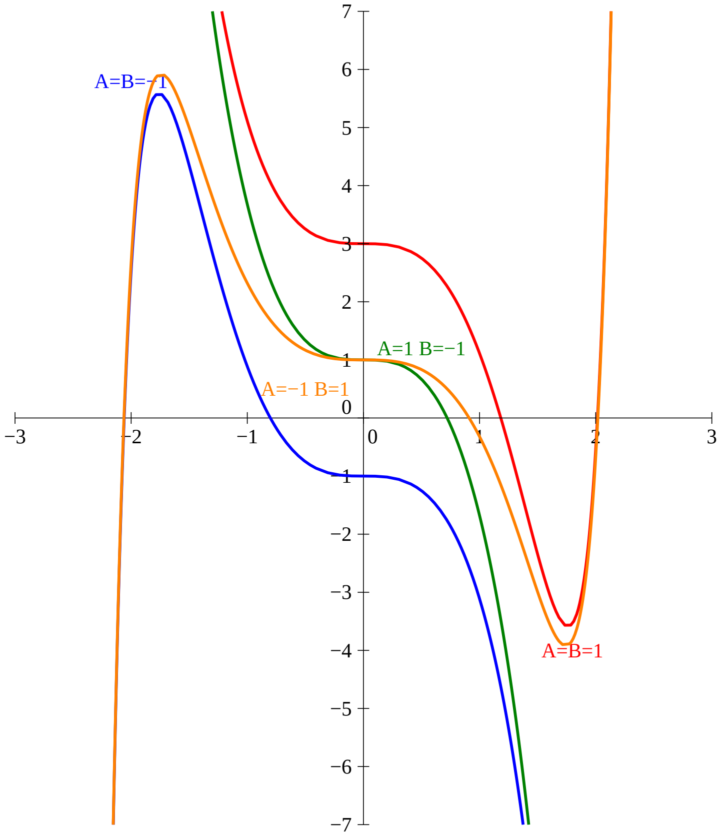
Devoir surveillé n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 décembre 2012

Exercice 1

Posons donc, comme le suggère l'énoncé, $t = x^3$, ou plutôt $y(x) = z(t) = z(x^3)$ (la fonction cube étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est certainement possible). On peut alors dériver : $y'(x) = 3x^2z'(x^3)$, puis $y''(x) = 6xz'(x^3) + 9x^4z''(x^3)$. L'équation initiale peut alors s'écrire $6x^2z'(x^3) + 9x^5z''(x^3) - 6x^2z'(x^3) - x^5z(x^3) = 2x^8 - x^5$, soit en divisant tout par x^5 (on fera une résolution séparée sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$) $9z''(t) - z(t) = 2t - 1$. L'équation homogène associée à cette nouvelle équation a pour équation caractéristique $9r^2 - 1 = 0$, qui admet deux racines réelles $r = \dfrac{1}{3}$ et $r = -\dfrac{1}{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $z_h : t \mapsto Ae^{-\frac{t}{3}} + Be^{\frac{t}{3}}$. Une solution particulière évidente est la fonction $z_p : t \mapsto 1 - 2t$ (qui a une dérivée seconde nulle), donc les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions $z : t \mapsto Ae^{-\frac{t}{3}} + Be^{\frac{t}{3}} + 1 - 2t$, et sur $\mathbb{R}^{-*}$ elles sont de la même forme avec des constantes différentes : $z : t \mapsto Ce^{-\frac{t}{3}} + De^{\frac{t}{3}} + 1 - 2t$. On trouve ainsi des solutions de l'équation initiale de la forme $y : x \mapsto Ae^{-\frac{x^3}{3}} + Be^{\frac{x^3}{3}} + 1 - 2x^3$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et similairement avec des constantes C et D sur $\mathbb{R}^{-*}$). Toutes ces fonctions donnent des solutions définies sur $\mathbb{R}$ en prenant les mêmes constantes à gauche et à droite de 0, mais on peut également effectuer des recollement plus tordus. En effet, $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = A + B + 1$, et $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = C + D + 1$, ce qui impose la condition $A + B = C + D$, mais toutes les solutions ont une dérivée nulle en 0, indépendemment du choix des constantes (ce qui est logique au vu de l'équation différentielle, si on remplace x par 0, on obtient immédiatement la condition $y'(0) = 0$). Ainsi, la condition $A + B = C + D$ est suffisante pour pouvoir recoller des solutions en 0. Ce n'était pas demandé mais voici quelques allures de solutions pour conclure (ici, les moitiés de courbes oranges et vertes se recollent en 0) :



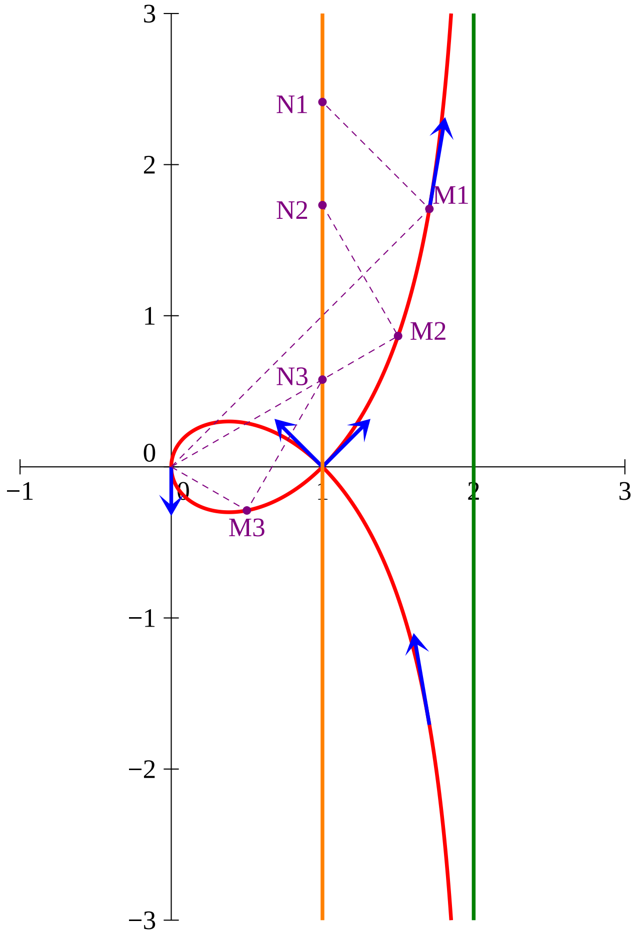
Exercice 2

1. La fonction ρ n'est pas définie si $\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$, soit $\dfrac{\theta}{2}\equiv\dfrac{\pi}{4}[\pi]$ et $\theta\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. Donc $\mathcal{D}_\rho=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Tentons de prouver la première égalité en utilisant uniquement des formules que vous connaissez bien, en l'occurence de l'addition en début de parcours et de la reconnaissance de duplication à la fin : $\rho(\theta)=\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\theta}{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{\theta}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\theta}{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{\theta}{2})}=\dfrac{\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})}$
$=\dfrac{(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}))^2}{(\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2}))(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}))}=\dfrac{\cos^2(\frac{\theta}{2})+\sin^2(\frac{\theta}{2})+2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})-\sin^2(\frac{\theta}{2})}=\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.
La deuxième égalité est facile une fois qu'on a la première : $\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}\Leftrightarrow 1-\sin(\theta)^2=\cos(\theta)^2$ par produit en croix, et on réconnait une formule trigonométrique classique.
2. La fonction tan étant π-périodique, ρ sera 2π-périodique, on peut restreindre l'étude à un intervalle de largeur 2π. On peut également constater que $\rho(\pi-\theta)=\dfrac{1+\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\dfrac{1+\sin(\theta)}{-\cos(\theta)}=-\rho(\theta)$, ce qui signifie qu'il y a une symétrie de la courbe par rapport à (Ox) pour des valeurs de θ symétriques par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$. On peut donc se contenter d'étudier ρ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, la symétrie nous donnera la courbe sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$.
Pour l'étude de variations, on part de $\rho(\theta)=\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, ce qui donne
$\rho'(\theta)=\dfrac{\cos^2(\theta)+\sin(\theta)(1+\sin(\theta)))}{\cos^2(\theta)}=\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}$. La fonction sin ne prenant que des valeurs

supérieures à -1, cette dérivée est toujours positive, s'annulant uniquement pour $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$. Vu les tangentes qui nous sont demandées, on peut calculer $\rho'(0) = 1$, et $\rho'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2+\sqrt{2}$; ainsi que $\rho\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ (on a ici un point stationnaire, mais il s'agit d'un point ordinaire puisque ρ change de signe à cet endroit), $\rho(0) = 1$ et $\rho\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$. La tangente en 0 est dirigée par le vecteur $(1,1)$ et passe par le point $(1,0)$, elle a pour équation $y = x-1$; la tangente en $-\dfrac{\pi}{2}$ passe par l'origine et elle est radiale, il s'agit de l'axe des ordonnées ; enfin la tangente en $\dfrac{\pi}{4}$ a pour vecteur directeur $(2+\sqrt{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}} + (1+\sqrt{2})\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}} = (\sqrt{2}+1)\overrightarrow{i} + (\sqrt{2}+1)\overrightarrow{j} - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\overrightarrow{j} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+2\right)\overrightarrow{j}$, ou si l'on préfère $\overrightarrow{i} + (3+2\sqrt{2})\overrightarrow{j}$ (en multipliant tout par $\sqrt{2}$). Comme cette tangente passe par le point $\left((\sqrt{2}+1)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}, (\sqrt{2}+1)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, elle a pour équation $(3+2\sqrt{2})\left(x-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - y + 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$, soit $y = (3+2\sqrt{2})x - 4 - 3\sqrt{2}$. On peut résumer tout cela dans le tableau suivant :

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(\theta)$	0	$+$	1	$+$	$2+\sqrt{2}$	$+$	||
ρ	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$1+\sqrt{2}$	$\rightarrow +\infty$	||

3. Il suffit d'écrire que $x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) = 1+\sin(\theta)$, et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) = (1+\sin(\theta))\tan(\theta)$. On a sans aucune difficulté $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} x(\theta) = 2$, et $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} y(\theta) = +\infty$. La courbe admet donc en $\dfrac{\pi}{2}$ une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
4. Voici la courbe, avec l'asymptote en vert et les tangentes remarquables en bleu (en tenant compte de la symétrie par rapport à (Ox) :



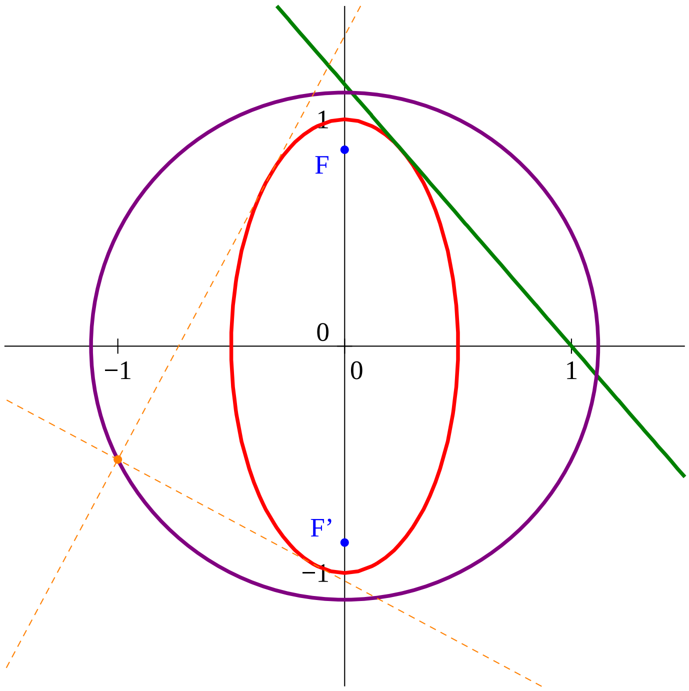
5. (a) Je vous en ai même mis trois, les points M et N en violet, tout comme le tracé du rayon et de la perpendiculaire, et la droite $x = 1$ en orange ;

   (b) La perpendiculaire a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{OM(\theta)} = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ et elle passe par le point M, donc elle admet pour équation cartésienne $\rho\cos(\theta)(x - \rho\cos(\theta)) + \rho\sin(\theta)(x - \rho\sin(\theta)) = 0$, soit en simplifiant par ρ, $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = \rho$ (on pouvait aussi directement donner cette équation puisqu'il s'agit de l'équation normale de la droite). Pour $x = 1$, on obtient $y = \dfrac{\rho(\theta) - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)} - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta) - \cos(\theta)(1 - \sin(\theta))}{\sin(\theta)(1 - \sin(\theta))} = \dfrac{\cos(\theta)}{1 - \sin(\theta)} = \rho(\theta)$.

   (c) On calcule simplement $MN^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2$
$= (1+\sin(\theta)-1)^2 + \left((1 + \sin(\theta))\tan(\theta) - \dfrac{1 + \sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 = \sin^2(\theta) + (1+\sin(\theta))^2\left(\dfrac{\sin(\theta) - 1}{\cos(\theta)}\right)^2 = \sin^2(\theta) + \dfrac{(\sin^2(\theta) - 1)^2}{\cos^2(\theta)} = \dfrac{\sin^2(\theta)(1 - \sin^2(\theta)) + (1 - \sin^2(\theta))(1 - \sin^2(\theta))}{\cos^2(\theta)} = \dfrac{1 - \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}$, ce qui vaut bien 1. Cette constatation permet d'ailleurs de donner un moyen mécanique assez simple pour construire la courbe étudiée dans cet exercice. Les plus observateurs d'entre vous n'auront par ailleurs pas manqué de remarquer une similitude surprenant avec la strophoïde étudiée en cours.

Exercice 3

1. On reconnait une équation d'ellipse centrée en O, d'axe focal (Oy), de demi-grand axe $a = 1$ et de demi-petit axe $b = \frac{1}{2}$. On calcule aisément $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc les foyers ont pour coordonnées $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Par ailleurs, l'excentricité est donnée par $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. On peut vérifier que le point appartient bien à notre ellipse : $4 \times \frac{1}{16} + \frac{3}{4} = 1$, c'est bon. L'équation de la tangente est donc $4 \times \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$, ou si on préfère $2x + \sqrt{3}y = 2$.
3. Voici la bête, avec l'ensemble demandé à la dernière question (et les tangentes perpendiculaires issues d'un point de cet ensemble) :



4. (a) C'est du cours : $4xx_0 + yy_0 = 1$.
   (b) Pour mettre l'équation de droite sous la forme donnée, il faut tout diviser par c (si c est nul, la droite ne sera jamais tangente à l'ellipse). La droite est alors tangente à l'ellipse s'il existe un point (x_0, y_0) de l'ellipse tel que $\frac{a}{c} = 4x_0$ et $\frac{b}{c} = y_0$. Cela donne, compte tenu de l'équation de l'ellipse, la condition nécessaire et suffisante $4 \times \left(\frac{a}{4c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, soit en multipliant tout par $4c^2$ la condition annoncée $a^2 + 4b^2 = 4c^2$.
   (c) La droite passe par lé point M si $c = ax + by$, remplaçons dans la condition obtenue à la question précédente : $a^2 + 4b^2 = 4(ax + by)^2$, soit $a^2 + 4b^2 = 4a^2x^2 + 8abxy + 4b^2y^2$. En divisant tout par a^2 (si a est nul l'énoncé de la question n'a pas de sens) et en constatant que $m^2 = \frac{b^2}{a^2}$, on trouve $1 + 4m^2 = 4x^2 - 8mxy + 4m^2y^2$. Il ne reste plus qu'à diviser tout par 4 et réordonner les termes : $m^2(1 - y^2) + 2mxy + \frac{1}{4} - x^2 = 0$.

(d) Deux tangentes (de pentes distinctes) passent par M si l'équation du second degré précédente (dont l'inconnue m est l'inverse de la pente de la tangente) admet deux solutions, donc si son discriminant est strictement positif. On calcule $\Delta = (2xy)^2 - 4\left(\frac{1}{4} - x^2\right)(1 - y^2) = 4x^2y^2 - 1 + y^2 + 4x^2 - 4x^2y^2 = 4x^2 + y^2 - 1$. La conditon recherchée est donc $4x^2 + y^2 - 1 > 0$. On fait un lien évident avec l'équation de l'ellipse : deux tangentes pasent par un point M si et seulement si ce point est situé à l'extérieur de l'ellipse.

(e) Deux droites sont perpendiculaires si le produit de leurs pentes (ou de leurs inverses) vaut -1. On cherche donc une condition pour que notre équation ait deux racines dont le produit vaut -1. Or, on sait que les racines de l'équation $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ont pour produit $\frac{\gamma}{\alpha}$. Ce produit vaut -1 si $\gamma = -\alpha$, c'est-à-dire ici si $\frac{1}{4} - x^2 = y^2 - 1$, soit $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$. On reconnait l'équation du cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 4

1. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Dérivons : $x'(t) = 2 - \frac{2}{(2t+1)^2} = \frac{2(4t^2+4t+1-1)}{(2t+1)^2} = \frac{8t(t+1)}{(2t+1)^2}$, ce qui s'annule pour $t = 0$ et $t = 1$ (et est négatif entre les racines). Pour la seconde fonction, $y'(t) = 2t + \frac{2}{(2t+1)^2} = \frac{2(4t^3+4t^2+t+1)}{(2t+1)^2}$. Le numérateur s'annule effectivement lorsque $t = -1$, on peut factoriser sous la forme $4t^3 + 4t^2 + t + 1 = (t+1)(at^2+bt+c) = at^3 + (a+b)t^2 + (b+c)t + c$. Par identification, $a = 4$ puis $b = 0$ et 1, ce qui donne $y'(t) = \frac{2(t+1)(4t^2+1)}{(t^2+1)^2}$. Cette dérivée est du signe de $t+1$, en particulier elle s'annule uniquement lorsque $t = 1$. On en profite pour calculer $x(0) = 1$, $y(0) = -1$; $x(-1) = -2 - 1 = -3$ et $y(-1) = 1 + 1 = 2$. Le calcul des limites ne présente aucune difficulté, d'où le tableau suivant :

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↗	$+\infty$

2. Les plus courageux calculeront les dérivées secondes, en partant de l'expression des dériovées qui n'est pas mise au même dénominateur (ça va plus vite !) : $x''(t) = \frac{8}{(2t+1)^3}$, donc $x''(-1) = -8$; et $y''(t) = 2 - \frac{8}{(2t+1)^3}$, donc $y''(t) = 10$. On peut donc prendre comme vecteur tangent $\overrightarrow{u}(-4, 5)$. Autre méthode, calculer la limite du quotient $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2(t+1)(4t^2+1)}{(2t+1)^2} \times \frac{(2t+1)^2}{8t(t+1)} = \frac{4t^2+1}{4t}$, qui a pour limite $-\frac{5}{4}$ en -1. On retrouve évidemment la même direction pour la tangente que par l'autre méthode.

3. Commençons par le plus simple : en mettant tout au même dénominateur, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{2t^3 + t^2 - 1}{4t^2 + 2t + 1}$, qui a des limites infinies en $+\infty$ et en $-\infty$. Il y a donc des deux côtés des branches paraboliques de direction (Oy).
En $-\dfrac{1}{2}$, en utilisant le calcul précédant, $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ a pour limite $\dfrac{2 \times (-\frac{1}{8}) + \frac{1}{4} - 1}{4 \times \frac{1}{4} - 1 + 1} = -1$. On calcule donc $y(t) + x(t) = t^2 + 2t$, qui a pour limite $\dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$ en $-\dfrac{1}{2}$. Il y a donc une asymptote oblique Δ d'équation $y = -x - \dfrac{3}{4}$.
Déterminons donc le signe de $y(t) + x(t) + \dfrac{3}{4} = t^2 + 2t + \dfrac{3}{4}$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 - 3 = 1$, il s'annule pour $t_1 = \dfrac{-2+1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, et $t_2 = \dfrac{-2-1}{2} = -\dfrac{3}{2}$. La courbe est située en-dessous de Δ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right[$, et en-dessous le reste du temps. Elle coupe l'asymptote quand $t = -\dfrac{3}{2}$, pour $x = -3 + \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{7}{2}$, et $y = \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{4}$ (qu'on peut aussi retrouver par l'équation de droite). Ce point sera noté A sur la courbe.

4. Commençons par écrire que $x(t) = x(u)$: $\dfrac{4t^2 + 2t + 1}{2t + 1} = \dfrac{4u^2 + 2u + 1}{2u + 1}$, soit après un produit en croix assez laid $8t^2u + 4tu + 2u + 4t^2 + 2t + 1 = 8tu^2 + 4tu + 2t + 4u^2 + 2u + 1$. Ca se simplfie pour donner $8t^2u - 8tu^2 + 4t^2 - 4u^2 + 0$, soit $4(t-u)(2tu + t + u) = 0$. Puisqu'on suppose $t \neq u$, on trouve bien la première condition $2P + S = 0$. Passons à la deuxième condition : $\dfrac{2t^3 + t^2 - 1}{2t + 1} = \dfrac{2u^3 + u^2 - 1}{2u + 1}$, d'où $4t^3u + 2t^2u - 2u + 2t^3 + t^2 - 1 = 4tu^3 + 2tu^3 - 2t + 2u^3 + u^2 - 1$. Comme tout à l'heure on passe tout du même côté et on factorise : $(t-u)(4tu(t+u) + 2tu + 2 + 2(t^2 + tu + u^2) + t + u) = 0$. On doit donc avoir $4SP + 2(t^2 + 2tu + u^2) + S = -2$, soit $4SP + 2S^2 + S = -2$, ce qui donne bien la condition de l'énoncé. Comme on a par ailleurs $2P + S = 0$, $4P + 2S = 2 \times 0 = 0$, donc on trouve $S = -2$, puis $2P = 2$, donc $P = 1$. Les nombres t et u sont donc racines de l'équation du second degré $x^2 + 2x + 1 = 0$. Mais cette équation n'a qu'une seule racine double égale à -1. Il n'y a donc pas de point double sur cet arc paramétré.

5. Voilà :