Devoir surveillé n°4

PTSI B Lycée Eiffel

15 décembre 2012

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle $xy'' - 2y' - x^5y = 2x^8 - x^5$ en effectuant le changement de variable $t = x^3$. Y a-t-il des solutions à cette équation définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

On considère dans cet exercice la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ dans un repère orthonormal direct.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction ρ ?
   Vérifier que $\forall \theta \in \mathcal{D}_\rho$, on a $\rho(\theta) = \dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}$ (vous êtes priés de continuer l'exercice avec ces formules même si vous n'arrivez pas à les prouver, ce n'est pas facile).
2. Déterminer les symétries éventuelles de la courbe, puis donner le tableau de variations de la fonction ρ. Préciser les tangentes à la courbe en ses points de paramètre 0, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$.
3. Donner les coordonnées cartésiennes $x(\theta)$ et $y(\theta)$ du point de paramètre θ de la courbe (on montrera en particulier que $x(\theta) = 1 + \sin(\theta)$). En étudiant leurs limites en $\frac{\pi}{2}$, prouver que la courbe admet une asymptote à préciser en $\frac{\pi}{2}$.
4. Tracer l'allure de la courbe.
5. Soit M le point de la courbe de paramètre θ, la perpendiculaire à (OM) passant par M coupe la droite d'équation $x = 1$ en un point N.
   (a) Compléter la figure précédente en plaçant deux points M distincts et les points N correspondants.
   (b) Montrer que l'ordonnée du point N est égale à $\rho(\theta)$.
   (c) En déduire que $MN = 1$.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation $4x^2 + y^2 = 1$.

1. Déterminer la nature, l'excentricité, ainsi que les coordonnées des foyers de la conique $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point $A\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. Tracer la conique ainsi que la tangente déterminée à la question précédente.
4. On cherche à déterminer quels sont les points du plan par lesquelles passent deux tangentes à $\mathcal{C}$ qui sont orthogonales.

(a) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées (x_0, y_0).

(b) Montrer que la droite d'équation $ax+by=c$ est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $a^2+4b^2=4c^2$.

(c) En notant $m=-\dfrac{b}{a}$, montrer que la droite D passe par le point $M(x,y)$ en étant tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(1-y)^2m^2+2mxy+\dfrac{1}{4}-x^2=0$.

(d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux droites tangentes à $\mathcal{C}$ passent par M. On donnera une interprétation géométrique simple de cette condition.

(e) Déterminer les points par lesquels passent deux tangentes perpendiculaires à $\mathcal{C}$, et représenter l'ensemble de ces points sur la figure de la question 3.

Exercice 4

On considère la courbe paramétrée d'équation $\begin{cases} x(t) &= 2t+\dfrac{1}{2t+1} \\ y(t) &= t^2-\dfrac{1}{2t+1} \end{cases}$

1. Étudier les variations des fonctions x et y (on notera que le numérateur du troisième degré qu'on doit obtenir pour une des deux fonctions a pour racine évidente -1).
2. Déterminer un vecteur tangent à l'arc en son unique point stationnaire.
3. Étudier les branches infinies de l'arc. On prouvera en particulier qu'il existe une droite asymptote Δ lorsque t tend vers $-\dfrac{1}{2}$, dont on mettra l'équation sous la forme $y=ax+b$, et on étudiera la position relative de la courbe et de Δ (en étudiant le signe de $y(t)-ax(t)-b$).
4. On cherche à déterminer les points doubles de l'arc. Montrer que, si on note $S=t+u$ et $P=tu$, les points de l'arc correspondant aux valeurs distinctes t et u du paramètre sont confondus si et seulement si $\begin{cases} 2P+S &= 0 \\ S(4P+2S+1) &= -2 \end{cases}$. En déduire les coordonnées des points doubles éventuels de l'arc.
5. Tracer une allure de l'arc, en respectant en particulier sa position par rapport à Δ.