Devoir surveillé n°3 : corrigé

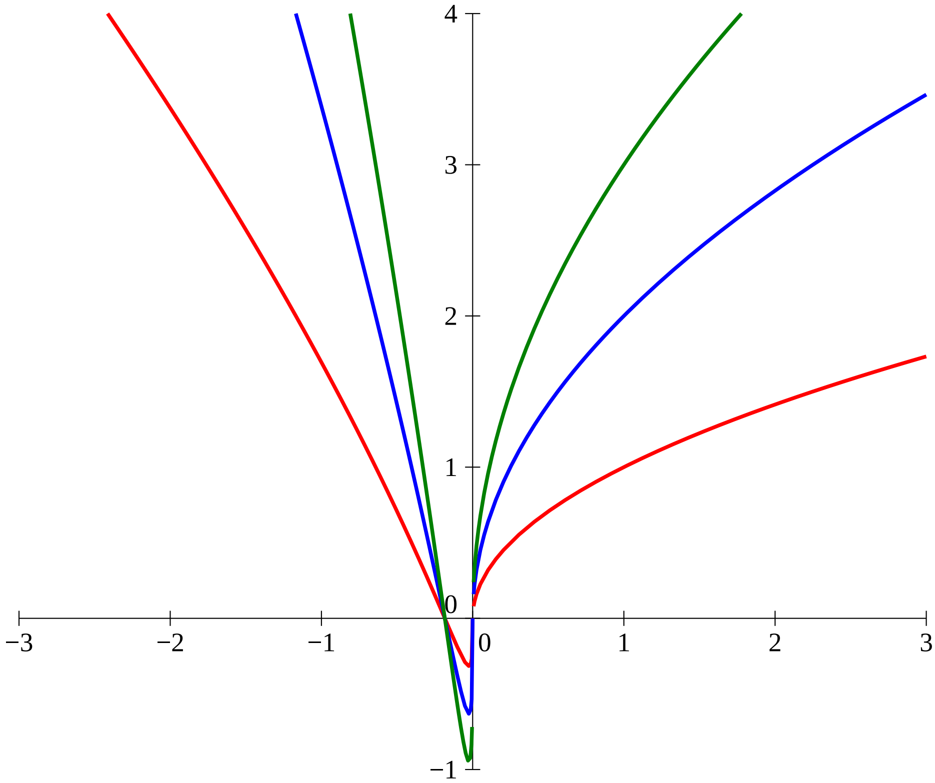
PTSI B Lycée Eiffel

24 novembre 2012

Exercice 1

1. La fonction f et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4x}$ étant dérivables sur $]0;+\infty[$, leur composée est dérivable sur cet intervalle. La fonction f' est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et f y est deux fois dérivable.
2. Dérivons la relation de départ : $-\dfrac{1}{4x^2}f'\left(\dfrac{1}{4x}\right) = f''(x)$. Or, en remplaçant x par $\dfrac{1}{4x}$ dans la relation initiale, $f'\left(\dfrac{1}{4x}\right) = f(x)$. La fonction f est donc solution de l'équation $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^2}f(x)$, ou encore $4x^2f''(x) + f(x) = 0$.
3. Posons donc $f(x) = g(\ln(x))$, ce qui est toujours possible sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On a alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}g'(\ln(x))$, puis $f''(x) = \dfrac{g''(\ln(x)) - g'(\ln(x))}{x^2}$. En reportant ces relations dans l'équation (E), on trouve $4g''(t) - 4g'(t) + g(t) = 0$, ce qui constitue bien une équation à coefficients constants.
4. Cette équation étant homogène, il suffit re résoudre son équation caractéristique $4r^2-4r+1 = 0$. On reconnait l'identité remarquable $(2r-1)^2 = 0$, donc l'équation admet pour solution double $r = \dfrac{1}{2}$, et les solutions de l'équation sont les fonctions $g : t \mapsto (A+Bt)e^{\frac{t}{2}}$. en reprenant le changement de variable effectué, on trouve pour les solutions de (E), $y(x) = (A+B\ln(x))e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = (A+B\ln(x))\sqrt{x}$.
5. On pose cette fois $h(\ln(-x)) = f(x)$, et on obtient comme précédemment (les signes $-$ disparaissent en dérivant) $\dfrac{1}{x}h'(\ln(-x)) = f'(x)$ puis $f''(x) = \dfrac{h''(\ln(-x)) - h'(\ln(-x))}{x^2}$. L'équation vérifiée par h est donc la même que celle obtenue plus haut pour g, et on obtient $y(x) = (A+B\ln(-x))\sqrt{-x}$.
6. Commençons par regarder sur $\mathbb{R}^{+*}$: si $f(x) = (A+B\ln(x))\sqrt{x}$, alors $f'(x) = \dfrac{B}{x}\sqrt{x} + \dfrac{A+B\ln(x)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2B+A+B\ln(x)}{2\sqrt{x}}$; et $f\left(\dfrac{1}{4x}\right) = (A-B\ln(4x))\sqrt{\dfrac{1}{4x}} = \dfrac{A-2B\ln(2)-B\ln(x)}{2\sqrt{x}}$. La fonction f ne peut donc être solution que si $B = 0$. On trouve alors $f(x) = A\sqrt{x}$. Sur $\mathbb{R}^{-*}$, si $f(x) = (A+B\ln(-x))\sqrt{-x}$, on obtient de façon très similaire $f'(x) = \dfrac{2B-A-B\ln(-x)}{2\sqrt{-x}}$ (la racine carrée a désormais une dérivée négative), et $f\left(\dfrac{1}{4x}\right) = \dfrac{A-2B\ln(2)-B\ln(-x)}{2\sqrt{-x}}$ (ici, rien ne change), donc f est solution si $2B-A = A-2B\ln(2)$, soit $B(1+\ln(2)) = A$. Finalement, on a $f(x) = B(1+\ln(2)+\ln(-x))\sqrt{-x} = (1+\ln(-2x))\sqrt{-x}$.
7. Il en existe énormément puisque toutes les fonctions obtenues sur chacun des deux intervalles ont une même limite nulle en 0 (pour celles sur $]-\infty,0[$, c'est un résultat de croissance comparée qui nous permet de l'affirmer). Toute fonction f vérifiant $f(x) = B(1+\ln(-2x))\sqrt{-x}$ si $x<0$; $f(0) = 0$; et $f(x) = A\sqrt{x}$ si $x>0$ est donc solution du problème (A et B pouvant être des

constantes distinctes). Ce n'était pas demandé, mais voici une allure des solutions (en rouge pour $A = B = 1$, en bleu $A = B = 2$ et en vert $A = B = 3$) :



Exercice 2

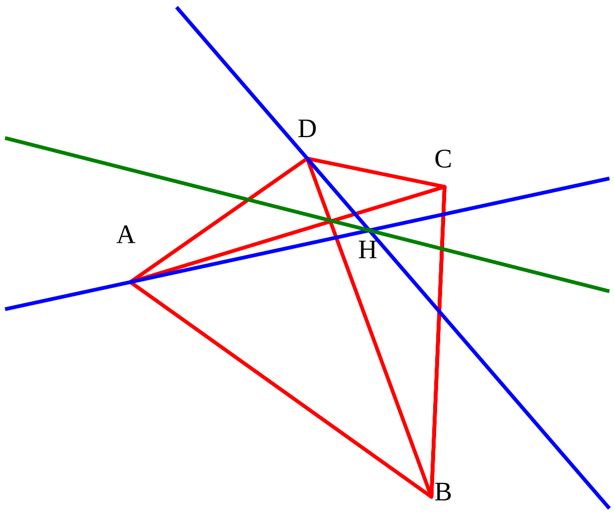
1. Puisque $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$, on calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2, -3, 1)$. Ce produit vectoriel n'étant pas nul, les trois points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan (ABC) si $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = 0$, soit $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0$. En reprenant le calcul précédent, on obtient l'équation $2x - 3y + z = 0$. Un système d'équations paramétriques est obtenu en prenant comme point du plan A et comme base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, ce qui donne $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 2t & + & u \\ y & = & t & + & u \\ z & = & -t & + & u \end{array}\right.$, où $(t, u) \in \mathbb{R}^2$.
3. La sphère tangente au plan est celle dont le rayon est égal à la distance de son centre au plan. Ici, en reprenant l'équation cartésienne de (ABC), $d(M_k, (ABC)) = \dfrac{|k|}{\sqrt{4+9+1}} = \dfrac{|k|}{\sqrt{14}}$. La sphère a donc pour rayon $\dfrac{|k|}{\sqrt{14}}$. Il existe deux valeurs de k pour lesquelles ce rayon est égale à 2, $k = 2\sqrt{14}$, et $k = -2\sqrt{14}$.
4. Notons (x, y, z) les coordonnées du point D. On peut alors calculer $\overrightarrow{AD} = (x, y, z)$; $\overrightarrow{BD} = (x - 2, y - 1, z + 1)$; $\overrightarrow{CD} = (x - 1, y - 1, z - 1)$ et $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, 2)$. Les trois conditions données s'écrivent respectivement $-x + 2z = 0$; $x + y + z - 2 = 0$ et $2x + y - z - 2 = 0$. Ce système se résout très rapidement : $x = 2z$, puis en injectant dans la deuxième équation $y = 2 - x - z = 2 - 3z$, et la troisième équation devient $4z + 2 - 3z - z - 2 = 0$, qui est toujours vérifiée. Les points recherchés sont donc de la forme $(2z, 2 - 3z, z)$, pour $z \in \mathbb{R}$. On reconnait le paramétrage d'une droite passant par le point de coordonnées $(0, 2, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (2, -3, 1)$.

5. Si on injecte le paramétrage précédent dans l'équation cartésienne de (ABC), on trouve $4z-6+9z+z=0$, soit $z=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$. Il existe donc une unique solution dans (ABC), de coordonnées $\left(\frac{6}{7},-\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$. Ce point est l'orthocentre du triangle ABC, puisque les trois conditions de la question 4 associée à l'appartenance du point au plan (ABC) signifient qu'il appartient aux trois hateurs du triangle.
6. C'est du calcul facile : $AD=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$; $BD=\sqrt{0+4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $CD=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. Enfin, en reprenant l'équation cartésienne, $d(D,(ABC))=\frac{|4+3+1|}{\sqrt{14}}=\frac{8}{\sqrt{14}}$.
7. On connait la hauteur du tétraèdre grâce à la question précédente. L'aire de se base vaut $\frac{1}{2}\parallel \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\parallel=\frac{\sqrt{14}}{2}$, donc le volume du tétraèdre est $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{14}}{2}\times\frac{8}{\sqrt{14}}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.
8. Un plan perpendiculaire simultanément à (ABC) et (BCD) admet pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}=(1,0,-2)$ puisque la droite (BC) est commune aux deux plans. Ainsi, son équation cartésienne est de la forme $x-2z+d=0$. Si on veut qu'il soit tangent à $\mathcal{S}$, la distance du centre de $\mathcal{S}$ au plan doit être égale à 2 (rayon de la sphère), soit $\frac{|-4\sqrt{14}+d|}{\sqrt{1+4}}=2$. La condition $|d-4\sqrt{14}|=2\sqrt{5}$ donne en fait deux valeurs possibles pour d, $d_1=2\sqrt{5}+4\sqrt{14}$, et $d_2=4\sqrt{14}-2\sqrt{5}$. Pour la valeur d_1 par exemple, l'équation du plan est $x-2z+4\sqrt{14}-2\sqrt{5}=0$.
9. (a) La hauteur issue de A devant être perpendiculaire au plan (BCD), elle est donc dirigée par un vecteur normal à (BCD). Choisissons par exemple $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}=(-1,0,2)\wedge(1,-2,0)=(4,2,2)$. Tant qu'à faire, on peut diviser tout par 2, et comme la droite passe par le point A, on obtient le paramétrage $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right.$. Pour la hauteur issue de D, c'est encore plus rapide puisqu'on a déjà un vecteur normal calculé à la première question, on obtient le paramétrage $\left\{\begin{array}{lcccc} x & = & 2 & + & 2u \\ y & = & -1 & - & 3u \\ z & = & 1 & + & u \end{array}\right.$.

   (b) À l'aide des paramétrages, on obtient pour l'intersection le système $\left\{\begin{array}{lcccc} 2t & = & 2 & + & 2u \\ t & = & -1 & - & 3u \\ t & = & 1 & + & u \end{array}\right.$. Les deux équations extrêmes sont équivalents, et les deux dernières équations impliquent $-1-3u=1+u$, soit $u=-\frac{1}{2}$, puis $t=\frac{1}{2}$. Le point d'intersection recherché a donc pour coordonnées $H\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Pour vérifier que H est sur la hauteur issue de B, il faut que $\overrightarrow{BH}$ soit orthogonal au plan (ACD), donc à $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Comme $\overrightarrow{BH}=\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, on calcule $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=-1-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$; et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD}=-2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=0$. Le point H est bien sur la troisième hauteur (et accessoirement sur la quatrième, celle issue de C, mais ce n'était pas demandé).

   (c) La perpendiculaire commune aux deux droites sera dirigée par $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{BC}=(2,-1,-1)\wedge(-1,0,2)=(-2,-5,-1)$. On prendra plutôt $\overrightarrow{u}=(2,5,1)$ comme vecteur directeur. Notons $\mathcal{P}_1$ le plan contenant la droite (AD) et la perpendiculaire commune, il admet pour base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AD})$, donc pour vecteur normal $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AD}=(2,5,1)\wedge(2,-1,1)=(6,0,-12)$. Quitte à tout diviser par 6, on obtient comme équation du plan $\mathcal{P}_\infty : x-2z=0$ (puisque le plan passe par A). De même, on note $\mathcal{P}_2$ le plan contenant (BC) et la perpendiculaire commune, qui a donc pour vecteur normal $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{BC}=(2,5,1)\wedge(-1,0,2)=(10,-5,5)$. Une équation du plan $\mathcal{P}_2$ est donc $2x-y+z+d=0$, avec $2-1+1+d=0$ pour que C

appartienne au plan, d'où l'équation $2x-y+z-2=0$. Finalement, un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune est $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & - & 2z & & & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & 2 & = & 0 \end{array}\right.$. Les coordonnées du point H vérifient bien les deux équations : $1-1=0$ et $2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-2=0$, il appartient donc à cette perpendiculaire commune. Si on n'avait que ça à faire, on vérifierait de même qu'il appartient aux autres perpendiculaires communes d'arêtes non coplanaires du tétraèdre $ABCD$. Une petite figure pour conclure, avec les deux hauteurs en bleu, et la perpendiculaire commune en vert.



Problème

Première partie : Une étude de fonction.

1. La fonction f est définie si $\dfrac{1-x}{x} \geqslant 0$. Un petit tableau de signes donne $\mathcal{D}_f =]0;1]$ (attention à bien mettre les crochets dans le bon sens).

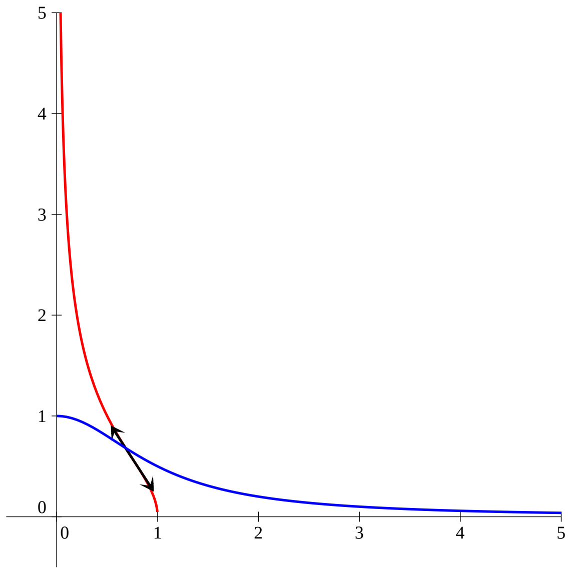
2. La fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;1[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = -\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$. Cette dérivée étant toujours négative, la fonction f est strictement décroissante. Comme de plus $f(1)=0$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, f est bijective de $]0;1]$ sur $\mathbb{R}^+$.

3. Cherchons à résoudre l'équation $f(x) = y$, soit $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = y$, on peut élever au carré pour obtenir $\dfrac{1-x}{x} = y^2$, soit $1-x = xy^2$, puis $x(y^2+1) = 1$ et $x = \dfrac{1}{1+y^2}$. On a donc $g : y \mapsto \dfrac{1}{1+y^2}$, qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0;1]$ ($g(0) = 1$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = 0$). Le théorème de la bijection nous assure que g est décroissante tout comme f.

4. Calculons donc (en reprenant la dernière expression de f') la dérivée seconde $f''(x) = \dfrac{4x\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \frac{2x^2}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}}{4x^4(\frac{1}{x}-1)} = \dfrac{4x(\frac{1}{x}-1)-1}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3-4x}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde est du

signe de $3-4x$, la fonction est donc convexe sur $\left]0;\frac{3}{4}\right]$ et concave sur $\left[\frac{3}{4};1\right]$, admettant un point d'inflexion en $x=\frac{3}{4}$. On calcule donc $f\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; et $f'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{-1}{\frac{18}{16}\sqrt{\frac{1}{3}}}=-\frac{8\sqrt{3}}{9}$. L'équation de la tangente au point d'inflexion est donc $y=-\frac{8\sqrt{3}}{9}\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{8\sqrt{3}}{9}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{16\sqrt{3}}{9}x+\sqrt{3}$.

5. Voici une allure, avec la tangente au point d'inflexion (f en rouge, g en bleu) :

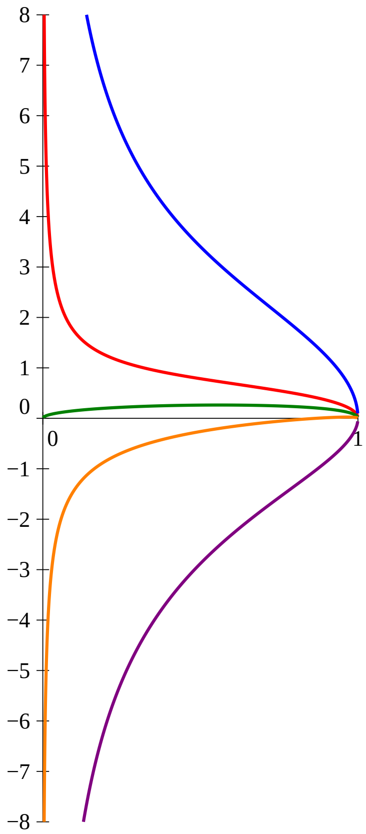


Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

1. La normalisation faisant apparaitre deux valeurs interdites, et le membre de droite n'est pas défini entre -1 (inclus) et 0, donc on résout séparément sur $]-\infty;-1[$; sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
2. Mettons au même dénominateur le membre de droite : $\frac{a}{x}+\frac{b}{1-x}=\frac{a-ax+bx}{x(1-x)}$. En identifiant, ceci est égal à $\frac{1}{2x(1-x)}$ si $a=\frac{1}{2}$ et $a-b=0$, soit $b=\frac{1}{2}$. On en déduit que $\frac{1}{2x(1-x)}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(1-x)}$. L'équation homogène normalisée $y'+\frac{1}{2x(1-x)}y=0$ a donc pour solutions sur $]0;1[$ les fonctions $y_h : x\mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(1-x)}=K_1\sqrt{\frac{1-x}{x}}=K_1f(x)$. Sur $]1;+\infty[$, on obtient de même $y_h(x)=K_2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$; et sur $]-\infty;-1[$, $y_h(x)=K_3\sqrt{\frac{1-x}{-x}}=K_3\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
3. Effectuons par exemple le calcul sur $]0;1[$, on cherche donc $y_p(x)=K(x)f(x)$, d'où $y_p'(x)=K'(x)f(x)-\frac{K(x)}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$. La fonction y_p est alors solution si $2x(1-x)K'(x)f(x)-\frac{\sqrt{x(1-x)}}{x}K(x)+K(x)f(x)=(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, donc $K'(x)=\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\sqrt{\frac{x}{1+x}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. On en déduit que $K(x)=\arcsin(x)$ convient, ce qui donne pour solutions de l'équation complète les fonctions $y(x)=\left(\frac{1}{2}\arcsin(x)+K_1\right)\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. De même, sur $]1;+\infty[$, on va trouver la condition $K'(x)=$

$\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$, soit $K(x) = \text{Argsh}(x)$, donc $y(x) = \left(\dfrac{1}{2}\text{Argsh}(x) + K_2\right)\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$; et sur $]-\infty;-1[$, on aura, à cause du $\sqrt{x^2}$ qui vaut $-x$, $K'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$, soit $K(x) = -\text{Argsh}(-x)$, je vous épargne la tête des solutions complètes. Il n'y évidemment pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ puisque l'équation ne peut pas avoir de sens sur l'intervalle $]-1,0[$.

4. En $\dfrac{1}{2}$, on a $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{6}$, donc $y(x) = \dfrac{\pi}{12} + K_1$ (la racine carrée vaut simplement 1), il faut donc choisir $K_1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$. On a alors $y(x) = \left(\dfrac{1}{2}\arcsin(x) + \dfrac{\pi}{6}\right)\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.
5. Tout ce qu'on peut dire assez facilement, c'est que toutes les fonctions vont tendre vers 0 en 1, et auront une limite égale à $\pm\infty$ (selon le signe de K_1) si $K_1 \neq 0$. Ensuite, les problèmes de Cauchy dans $]0,1[$ ne pouvant avoir qu'une seule solution, les courbes ne peuvent pas se couper ailleurs que pour $x = 1$. On ne peut rien dire sur les variations de la fonction, mais la présence d'une tangente verticale en $x = 1$ est assurée si $K \geqslant 0$. À partir de ces maigres informations, si on trace des courbes relativement simples, on ne sera pas loin de la réalité (en rouge, la solution de la question précédente, en vert celle correspondant à $K = 0$, qui a une limite nulle en 0 mais c'est difficile à prouver) :



Une équation non linéaire.

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire $(F) : xy' + 2y(1-y) = 0$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Si y est constante, sa dérivée est nulle, donc elle vérifie $2y(1-y) = 0$, c'est-à-dire $y = 0$ ou $y = 1$.
2. Si y est à valeurs dans $]0;1[$, on aura toujours $2y(1-y) \geqslant 0$, donc pour vérifier l'équation on doit nécessairement avoir $xy' \leqslant 0$, d'où $y' \leqslant 0$ (puisque $x \in]0;1[$). La fonction y est donc décroissante.

3. Une fonction continue et monotone est toujours bijective, notons $z = y^{-1}$, on sait que $z'(t) = \dfrac{1}{y'(z(t))}$ (où on pose $t = y(x)$), ou encore $y'(z(t)) = \dfrac{1}{z'(t)}$, avec. En remplaçant x par $z(t)$ dans l'équation (F), on obtient $z(t)y'(z(t)) + 2z(t)(1 - z(t)) = 0$, soit $\dfrac{z(t)}{z'(t)} + 2t(1-t) = 0$. On peut multiplier par $z'(t)$ pour trouver $z(t) + 2t(1-t)z'(t) = 0$. On reconnait bien l'équation annoncée.
4. La variable t ayant été supposée appartenir à $]0;1[$, on reprend les résultats de la partie précédente : $z(t) = Kf(t) = K\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}$. On en déduit que $x = K\sqrt{\dfrac{1-y(x)}{y(x)}}$, soit $\dfrac{x^2}{K^2}y(x) = 1 - y(x)$, donc comme annoncé $y(x) = \dfrac{1}{1 + (\frac{x}{K})^2}$. On peut toujours prendre une constante K strictement positive, puisque 0 est exclu, et K et $-K$ donnent la même fonction pour y. Les valeurs obtenues pour $y(x)$ sont manifestement positives, et tout aussi manifestement plus petites que 1 (puisque le dénominateur est strictement supérieur à 1), donc toutes les solutions trouvées conviennent.
5. Cette condition impose $1 + \left(\dfrac{x_0}{K}\right)^2 = \dfrac{1}{\alpha}$, soit $\dfrac{x_0}{K} = \sqrt{\dfrac{1}{\alpha} - 1}$ (tout est positif), donc $K = \dfrac{x_0}{f(\alpha)}$.
6. Écrivons plutôt $y(x) = \dfrac{K^2}{K^2 + x^2}$, et dérivons deux fois : $y'(x) = -\dfrac{2K^2x}{(K^2+x^2)^2}$ (les solutions sont donc décroissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$), et $f''(x) = \dfrac{-2K^2(K^2+x^2)^2 + 4x(K^2+x^2)(2K^2x)}{(K^2+x^2)^4} = \dfrac{-2K^4 - 2K^2x^2 + 8K^2x^2}{(K^2+x^2)^3} = \dfrac{2K^2(3x^2 - K^2)}{(K^2+x^2)^3}$. Cette dérivée seconde s'annule si $x = \dfrac{K}{\sqrt{3}}$, qui constitue donc l'unique point d'inflexion de la courbe. Remarquons que $y\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{4}$, et $f'\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{9}{8K\sqrt{3}}$. Si on impose la condition $f(2) = \dfrac{1}{2}$, on trouve $K = \dfrac{2}{f(\frac{1}{2})} = 2$, donc le point d'inflexion est atteint pour $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et $f'\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{9}{16\sqrt{3}}$. On peut tracer la courbe suivante :