Devoir surveillé n°3

PTSI B Lycée Eiffel

24 novembre 2012

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à déterminer toutes les fonctions dérivables f vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall x \neq 0,\ f\left(\dfrac{1}{4x}\right) = f'(x)$.

1. On se place sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Montrer que f est deux fois dérivable sur cet intervalle.
2. Déterminer une équation différentielle (E) d'ordre 2 dont f est solution.
3. En posant $t = \ln(x)$, ramener le problème à la résolution d'une équation différentielle à coefficients constants.
4. Résoudre cette équation, et en déduire les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. Effectuer une résolution similaire de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
6. Parmi les solutions de (E), déterminer lesquelles sont réellement solutions du problème initial sur chacun des deux intervalles.
7. Déterminer s'il existe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ solutions à notre problème.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, un repère orthonormal de l'espace $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est fixé. On considère les trois points $A(0,0,0)$; $B(2,1,-1)$ et $C(1,1,1)$.

1. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC), ainsi qu'un système d'équations paramétriques de ce même plan.
3. Déterminer le rayon de la sphère de centre $M_k(0,0,k)$ tangente au plan (ABC), où $k \in \mathbb{R}$. Parmi ces sphères, combien y-en-a-til ayant pour rayon 2 ? On note $\mathcal{S}$ la sphère de rayon correspondant à la plus grande valeur de k.
4. Déterminer l'ensemble des points $D(x,y,z)$ vérifiant $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}$. On donnera une équation paramétrique de cet ensemble.
5. Parmi tous les points obtenus à la question précédente, combien appartiennent au plan (ABC) ? Dans ce cas particulier, que représente le point D ?
6. On pose pour toute la suite du problème $D(2,-1,1)$. Déterminer les distances de D aux trois points A, B et C, ainsi que sa distance au plan (ABC).
7. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.
8. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$, perpendiculaire à (ABC) et à (BCD).
9. (a) On appelle hauteur issue d'un sommet dans un tétraèdre la droite passant par ce sommet et perpendiculaire à la face opposée. Déterminer une équation paramétrique des hauteurs issues de A et de D dans le tétraèdre $ABCD$.
   (b) Montrer que ces deux droite sont sécantes en un point H (dont on donnera les coordonnées) et vérifier que H appartient à la hauteur issue de B (sans calculer d'équation de cette troisième hauteur).
   (c) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à (AD) et (BC), et vérifier que H appartient à cette perpendiculaire commune.

Problème

Le but de ce problème est d'étudier une équation du premier ordre non linéaire par une méthode originale : en prouvant que les réciproques des solutions sont elles-mêmes solutions d'une équation différentielle linéaire.

Première partie : Une étude de fonction.

On considère dans cette partie la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f, en déduire qu'elle est bijective de $\mathcal{D}_f$ vers un intervalle à préciser.
3. Donner une expression simple de la réciproque g de la fonction f, ainsi que le tableau de variations de la fonction g.
4. Calculer la dérivée seconde f'' de f, étudier la convexité de f ainsi que la présence de points d'inflexion, et calculer l'équation des tangentes éventuelles aux points d'inflexion.
5. Tracer soigneusement les allures des courbes représentatives de f et de g dans un même repère (en tenant notamment compte des calculs effectués à la question précédente).

Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

On considère dans cette partie l'équation différentielle $(E) : 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$.

1. Sur quels intervalles va-t-on résoudre l'équation (E) ?
2. Déterminer deux constantes a et b telles que $\dfrac{1}{2x(1-x)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1-x}$, et en déduire les solutions de l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante, et en déduire les solutions de l'équation complète. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer l'unique solution définie sur $]0;1[$ et vérifiant $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Tracer une allure de cette solution, ainsi que de quelques autres solutions définies sur $]0,1[$ (on ne demande pas une étude détaillée de toutes les fonctions, mais une explication rapide de l'allure des courbes), dans un même repère.

Une équation non linéaire.

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire $(F) : xy' + 2y(1-y) = 0$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer les fonctions constantes solutions de l'équation (F).
2. Pour tout la suite, on cherchera à décrire les solutions de l'équation à valeurs dans $]0;1[$. Montrer que ces solutions sont nécessairement décroissantes.
3. En déduire qu'elles sont bijectives, et que leurs réciproques sont solutions de l'équation homogène associée à (E).
4. En déduire que les solutions cherchées sont de la forme $y(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{k})^2}$, où k est une constante strictement positive. Quelles sont les valeurs de k convenables (pour lesquelles y est effectivement à valeurs dans $]0;1[$) ?
5. Montrer que, si on fixe une valeur de x_0 strictement positive, et un réel $\alpha \in]0;1[$, il existe une unique solution parmi les précédentes vérifiant $y(x_0) = \alpha$.
6. Déterminer les points d'inflexion des solutions obtenues, et tracer une allure soignée de la courbe de la solution vérifiant $y(2) = \dfrac{1}{2}$.