# Devoir surveillé n°2

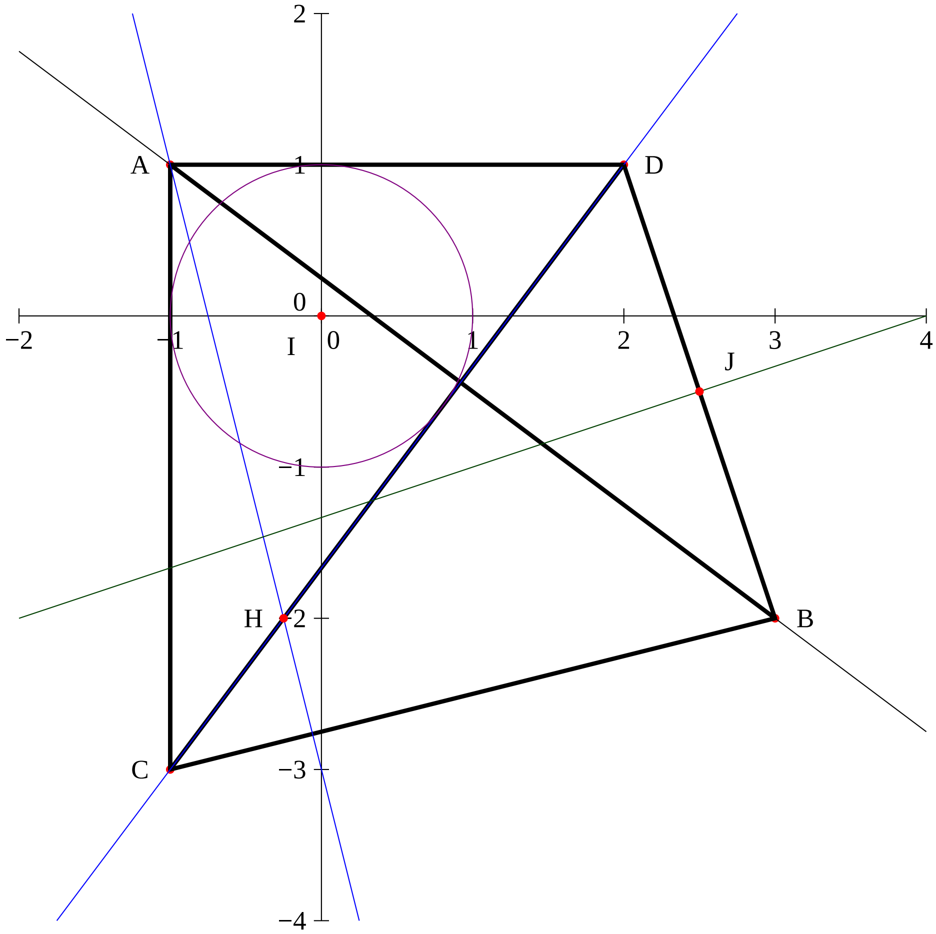
PTSI B Lycée Eiffel

13 octobre 2012

## Exercice 1

1. Puisqu'on est dans un repère orthonormal, on peut utiliser le produit scalaire : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 0 \times 3 + 4 \times 0 = 0$, le triangle est donc rectangle en $A$ (évidemment, si ça n'avait pas marché avec $A$, il aurait fallu tenter les deux autres sommets).
2. Par un calcul de déterminant, $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2} \times 12 = 6$. Sinon, plus directement, le triangle étant rectangle en $A$, la hauteur issue de $C$ est confondue avec $(AC)$ et $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times AC \times AD$. Or, $AC = \sqrt{0+16} = 4$ et $AD = \sqrt{9+0} = 3$, donc $\mathcal{A} = 6$.
3. Partons par exemple du vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4, -3)$. Le point $M(x, y)$ appartient à la droite $(AB)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, soit $\begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ y-1 & -3 \end{vmatrix} = 0$. On obtient donc $-3(x+1) - 4(y-1) = 0$, soit en changeant tous les signes $3x + 4y - 1 = 0$.
4. Commençons par la hauteur issue de $C$. Un point $M(x, y)$ appartient à cette hauteur si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = 0$, soit $4(x+1) - 3(y+3) = 0$. On obtient donc comme équation $4x - 3y - 5 = 0$. Pour la deuxième hauteur, on commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}(-4, -1)$, puis on procède de même : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = 0$ donne $-4(x+1) - (y-1) = 0$, soit $-4x - y - 3 = 0$. Pour obtenir les coordonnées de l'orthocentre, qui se situe à l'intersection de ces deux hauteurs, il ne reste plus qu'à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & - & 3y & = & 5 \\ -4x & - & y & = & 3 \end{array}\right.$. La somme des deux équations donne immédiatement $-4y = 8$, soit $y = -2$. On en déduit que $4x = 5 + 3y = -1$, soit $x = -\dfrac{1}{4}$. L'orthocentre a donc pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{4}, -2\right)$.
5. Posons comme d'habitude $M(x, y)$ et écrivons l'égalité sur le carré des distances (une distance étant toujours positive, c'est rigoureusement équivalent). Cela donne $(x-3)^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$. Ce n'est pas le moment d'être subtil, on développe tout : $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$, soit $-2x + 6y + 8 = 0$. On peut tout diviser par 2 pour avoir une équation légèrement plus simple : $-x + 3y + 4 = 0$. Autre possibilité, passer par le milieu $J\left(\dfrac{3+2}{2}, \dfrac{-2+1}{2}\right)$, soit $J\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. Un point $M(x, y)$ appartient à la médiatrice de $[BD]$ si $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{JM} = 0$, soit $-\left(x - \dfrac{5}{2}\right) + 3\left(y + \dfrac{1}{2}\right) = 0$. On trouve donc $-x + \dfrac{5}{2} + 3y + \dfrac{3}{2} = 0$, soit $-x + 3y + 4 = 0$. Incroyable mais vrai, on retrouve bien la même équation que tout à l'heure.
6. On a déjà fait les deux tiers du boulot plus haut : $d = 4$ et $c = 3$. Reste à calculer $a = CD = \sqrt{9+16} = 5$.
7. On calcule $x_I = \dfrac{5x_A + 3x_C + 4x_D}{12} = \dfrac{-5-3+8}{12} = 0$ ; et $y_I = \dfrac{5y_A + 3y_C + 4y_D}{12} = \dfrac{5-9+4}{12} = 0$. Mince alors, le point $I$ est en fait l'origine du repère !

8. Utilisons par exemple le calcul de distance faisant intervenir un vecteur directeur de la droite. On commence par $d(I,(AC)) = \dfrac{\det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AC})}{\| \overrightarrow{AC} \|} = \dfrac{-1 \times -4 - 1 \times 0}{4} = 1$. De même, $d(I,(AD)) = \dfrac{\det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AD})}{\| \overrightarrow{AD} \|} = \dfrac{-1 \times 0 + 1 \times 3}{3} = 1$, la distance est aussi égale à 1. Enfin, $d(I,(CD)) = \dfrac{\det(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{CD})}{\| \overrightarrow{CD} \|} = \dfrac{-1 \times 4 + 3 \times 3}{5} = 1$. Les distances de $I$ aux trois côtés du triangle étant égales à 1, le point $I$ est centre du cercle inscrit dans le triangle $ACD$. Ce cercle inscrit est donc le cercle trigonométrique, de centre $O$ et de rayon 1.
9. En gras les triangles, en bleu les hauteurs de $ABC$ (oui, il y en a une qui passe par $D$, je n'ai pas fait exprès !), en vert la médiatrice de $[BD]$, et en violet le cercle inscrit au triangle $ACD$ :




## Problème 1 : résolution d'équations du troisième degré

### I. Un cas particulier

On s'intéresse pour l'instant à l'équation $z^3 - 6z^2 + 9z - 1 = 0$.

1. Puisque $z = Z + 2$, on peut écrire $(Z+2)^3 - 6(Z+2)^2 + 9(Z+2) - 1 = 0$, soit $Z^3 + 6Z^2 + 12Z + 8 - 6Z^2 - 24Z - 24 + 9Z + 18 - 1 = 0$, donc $Z^3 - 3Z + 1 = 0$.
2. Encore du calcul peu subtile, $(u+v)^3 - 3(u+v) + 1 = 0$ donne $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u - 3v + 1 = 0$. En factorisant ce qu'on peut par $u+v$, $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 3(u+v) + 1 = 0$, ce qui donne bien $u^3 + v^3 + 3(uv-1)(u+v) + 1 = 0$.

3. Si on impose $uv = 1$, on a donc $u^3 + v^3 + 1 = 0$, soit $u^3 + v^3 = -1$. Comme par ailleurs $u^3v^3 = (uv)^3 + 1^3 = 1$, on connait le produit $P$ et la somme $S$ des deux nombres $u$ et $v$, ils sont donc solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$, soit ici $x^2 + x + 1 = 0$.
4. L'équation a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, et admet donc pour racines complexes conjuguées $x_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On peut donc poser $u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $v^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (ou le contraire, ça n'a aucune importance). Les valeurs possibles pour $u$ sont donc les racines cubiques de $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, c'est-à-dire $u_1 = e^{i\frac{2\pi}{9}}$ ; $u_2 = e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $u_3 = e^{i\frac{14\pi}{9}}$. De même, les valeurs possibles de $v$ sont $v_1 = e^{-i\frac{2\pi}{9}}$ ; $v_2 = e^{-i\frac{8\pi}{9}}$ et $v_3 = e^{-i\frac{14\pi}{9}}$.
5. Avec la condition ajoutée $uv = 1$, les trois couples possibles sont $(u_1, v_1)$ ; $(u_2, v_2)$ et $(u_3, v_3)$, qui donnent donc les trois valeurs possible de $Z$ : $Z_1 = u_1 + v_1 = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$ ; $Z_2 = u_2 + v_2 = 2\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)$ et $Z_3 = u_3 + v_3 = 2\cos\left(\dfrac{14\pi}{9}\right)$. On en déduit les solutions de l'équation initiale : $z_1 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$ ; $z_2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)$ et $z_3 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{14\pi}{9}\right)$. Remarquons que, malgré l'utilisation des nombres complexes, on obtient ici trois solution réelles.

## II. Généralisation

1. Développons comme précédemment $(Z-k)^3 + a(Z-k)^2 + b(Z-k) + c = Z^3 - 3kZ^2 + 9k^2Z - k^3 + aZ^2 - 2akZ + ak^2 + bZ - bk + c = Z^3 + (a-3k)Z^2 + (9k^2 - 2ak + b)Z - k^3 + ak^2 - bk + c$. Si on veut faire disparaitre le terme en $Z^2$, il suffit de prendre $k = \dfrac{a}{3}$. On obtiendra alors $p = 9k^2 - 2ak + b = a^2 - 2\dfrac{a^2}{3} + b = \dfrac{a^2}{3} + b$ ; et $q = -k^3 + ak^2 - bk + c = -\dfrac{a^3}{27} + \dfrac{a^3}{9} - \dfrac{ab}{3} + c = -\dfrac{2a^2}{27} + \dfrac{ab}{3} + c$.
2. On procède comme dans la première partie : $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ donne $u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0$, soit $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$. En posant $uv = -\dfrac{p}{3}$, on fait disparaitre le terme du milieu pour mettre sous la forme demandée.
3. Comme tout à l'heure, on a $U + V = -q$, et $UV = (uv)^3 = -\dfrac{p^3}{27}$.
4. Les nombres $U$ et $V$ sont donc solutions de l'équation $x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27}$, qui a pour discriminant $\Delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$. Si $\Delta > 0$, on trouvera donc $U = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ et $V = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$. Si $\Delta < 0$, on aura des valeurs complexes conjuguées $U = -\dfrac{q}{2} + i\sqrt{-\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}$, et $V = -\dfrac{q}{2} - i\sqrt{-\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}$. Si $\Delta = 0$, on aura $U = V$, ce qui n'est pas gênant pour la suite de la résolution. On cherche ensuite les racines cubiques (complexes) des deux nombres $U$ et $V$, on les apparie de façon à avoir un produit égal à 1 (il y aura toujours trois couples possibles), en calculant les sommes $u + v$ pour chacun des trois couples on trouve trois valeurs possibles pour $Z$, qui donnent les trois solutions $z = Z + k$.
5. Allons-y en commençant par poser $Z = z - 1$, on a donc $(Z+1)^3 - 3(Z+1)^2 + (9-6i)(Z+1) - 5 + 12i = 0$, soit $Z^3 + 3Z^2 + 3Z + 1 - 3Z^2 - 6Z - 3 + (9-6i)Z + 9 - 6i - 5 + 12i = 0$. En regroupant un peu, $Z^3 + 6(1-i)Z + 2 + 6i = 0$. On pose maintenant $Z = u + v$ pour obtenir $u^3 + 3u^3v + 3uv^2 + v^3 + 6(1-i)(u+v) + 2 + 6i = 0$, soit $u^3 + v^3 + 3(u+v)(uv + 2(1-i)) + 2 + 6i = 0$. On va donc imposer la condition supplémentaire $uv = 2i - 2$, et poser $U = u^3$ et $V = v^3$ pour obtenir les équations $U + V = -2 - 6i$, et $UV = (2i-2)^3 = -8i + 24 + 24i - 8 = 16 + 16i$. Les nombres $U$ et $V$ sont solution de l'équation du second degré $x^2 + (2+6i)x + 16 + 16i = 0$. Son discriminant est égal à $\Delta = (2+6i)^2 - 64 - 64i = 4 + 24i - 36 - 64 - 64i = -96 - 40i$. On cherche $\delta = a + ib$ tel que

$\delta^2 = \Delta$, ce qui donne les conditions $a^2 - b^2 = -96$ et $2ab = -40$. On a alors le choix entre être très courageux et calculer le module de $\Delta$ (qui vaut 104), ou bien être observateur et remarquer que $a = 2$ et $b = -10$ est un couple solution. On peut donc prendre $\delta = 2 - 10i$, et trouver les solutions $U = \dfrac{-2-6i+2-10i}{2} = -8i$ et $V = \dfrac{-2-6i-2+10i}{2} = -2+2i$. Ouf, on obtient deux nombres dont les racines cubiques sont faciles à calculer. Pour $u$, on peut prendre $u_1 = 2i$, $u_2 = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3}-i$ et $u_3 = 2ie^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}-i$. Pour $V = -2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, on obtient $v_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$ ; $v_2 = (1+i)e^{i\frac{2\pi}{3}} = (1+i)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $v_3 = (1+i)e^{i\frac{4\pi}{3}} = (1+i)\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + i\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$. Comme $2i(1+i) = -2+2i$, le couple $(u_1, v_1)$ est une solution correcte, qui mène à $Z = u_1 + v_1 = 1+3i$. De même, $u_2 + v_3 = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}} \times (1+i)e^{i\frac{4\pi}{3}} = -2+2i$, donc $Z = u_2 + v_3 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{-3-\sqrt{3}}{2}$ convient. Enfin, la troisième possibilité est $Z_3 = u_3 + v_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$. On en déduit aisément les solutions de l'équation initiale en se souvenant que $z = Z + 1$ : $z_1 = 2+3i$ ; $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$.

# Problème 2 : homographies du plan complexe

## I. Un cas particulier

1. L'application est évidemment définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Essayons donc de déterminer sa réciproque, posons $Z = f(z) = \dfrac{iz-1}{z+1}$, alors $Zz + Z = iz - 1$, soit $z(Z-i) = -1-Z$, ou encore $z = \dfrac{Z+1}{i-Z}$. Cette expression n'a un sens que si $Z \neq i$, et donne dans ce cas la valeur de l'unique antécédent par $f$ de $Z$. L'application $f$ est donc bijective de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{i\}$.

2. Calculons donc $f(2) = \dfrac{2i-1}{3} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}i$ ; et $f(1+i) = \dfrac{i-1-1}{2+i} = \dfrac{(i-2)(2-i)}{5} = \dfrac{-3+4i}{5} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$. Pour les antécédents, on peut exploiter le calcul de la question précédente, on connait déjà la réciproque de $f$. L'unique antécédent de 2 sera donc égal à $\dfrac{3}{i-2} = \dfrac{3(i+2)}{-5} = -\dfrac{6}{5} - \dfrac{3}{5}i$. Celui de $1+i$ est donné par $\dfrac{2+i}{-1} = -2-i$.

3. On cherche à résoudre l'équation $f(z) = z$, soit $z(z+1) = iz-1$, ou encore $z^2 + (1-i)z + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta = (1-i)^2 - 4 = -2i - 4$. On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, ce qui donne les deux conditions $a^2 - b^2 = -4$ et $ab = -2$. En ajoutant la condittion sur le module, on obtient la troisième équation $a^2 + b^2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. En soustrayant et additionnant les équations extrêmes, on a $2a^2 = 2\sqrt{5} - 4$ et $2b^2 = 2\sqrt{5} + 4$, ce qui permet de choisir en constatant que $a$ et $b$ sont de signe contraire $\delta = \sqrt{\sqrt{5}-2} - i\sqrt{\sqrt{5}+2}$. On trouve alors deux points invariants par $f$ : $z_1 = \dfrac{i-1+\delta}{2}$ et $z_2 = \dfrac{i-1i\delta}{2}$ (qu'on peut écrire entièrement si on le souhaite, mais ça n'a pas grand intérêt).

4. Posons $z = a + ib$, on a alors $f(z) = \dfrac{ai-b-1}{a+ib+1} = \dfrac{(ai-b-1)(a+1-ib)}{(a+1)^2+b^2}$ $= \dfrac{a^2i + ai + ab - ab - b + ib^2 - a - 1 + ib}{(a+1)^2+b^2} = \dfrac{-b-a-1+i(a^2+b^2+a+b)}{(a+1)^2+b^2}$. Pour avoir une image réelle, $z$ doit donc vérifier $a^2 + b^2 + a + b = 0$, soit $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = 0$. On

reconnait l'équation d'un cercle de centre $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour que l'image de $z$ soit imaginaire pure, on doit avoir $-b-a-1=0$, soit $b=-a-1$, donc $z$ appartient à une droite du plan, d'équation $y=-x-1$.

5. Pour avoir $f(z)\in\mathbb{U}$, il suffit d'avoir $|iz-1|=|z+1|$. En posant $z=a+ib$ et en élevant tout au carré, on trouve la condition $|ia-b-1|^2=|a+ib+1|^2$, soit $(-b-1)^2+a^2=(a+1)^2+b^2$. On développe tout : $b^2+1+2b+a^2=a^2+2a+1+b^2$, soit très simplement $a=b$. Les nombres complexes ayant une image de module 1 sont donc situés sur la première bissectrice des axes (on vérifie par exemple que c'est le cas pour $1+i$ dont on a calculé l'image plus haut : $\left|-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1$).
6. On n'arrive pas à grand chose à partir de l'expression de $f(z)$. Mieux vaut repartir de la réciproque : en posant $Z=c+id$, $\frac{Z+1}{i-Z}=\frac{c+1+id}{-c+i(1-d)}=\frac{(c+1+id)(-c-i+id)}{c^2+(1-d)^2}=\frac{-c^2-ic+icd-c-i+id-icd+d-d^2}{c^2+(1-d)^2}=\frac{-c^2-c+d-d^2+i(-c-1+d))}{c^2+(1-d)^2}$. Les images des nombres ayant une partie imaginaire strictement positive sont les $Z$ ayant un antécédent dont la partie imaginaire est positive, donc vérifiant $-c-1+d>0$, autrement dit $c+1<d$. Il s'agit du demi-plan situé au-dessus de la droite d'équation $y=x+1$ dans le plan complexe.

## II. Une étude plus générale

1. Prenons donc un $z\in\mathbb{U}$, qui peut s'écrire sous la forme $e^{i\alpha}$. On a alors $f(z)=\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}}=e^{i(\theta-\alpha)}\in\mathbb{U}$.
2. Comme $a\notin\mathbb{U}$, on ne peut pas avoir $|\overline{a}|=1$, donc $|\overline{a}e^{i\alpha}|\neq 1$. En particulier, $\overline{a}e^{i\alpha}\neq -1$, donc le dénominateur ne peut pas s'annuler si $z\in\mathbb{U}$. L'application est donc définie sur $\mathbb{U}$. Cherchons désormais à calculer $|f(z)|=\frac{|z+a|}{|\overline{a}z+1|}=\frac{|z+a|}{|\overline{a}z\overline{z}+\overline{z}|}\times|\overline{z}|$. Le nombre $z$ étant de module 1, $|\overline{z}|=1$ et $z\overline{z}=1$ donc $|f(z)|=\frac{|z+a|}{\overline{a}+\overline{z}}=\frac{|z+a|}{|\overline{z+a}|}=1$, donc $f(z)\in\mathbb{U}$.
3. (a) Écrivons $\alpha=a+ib$ et $\beta=c+id$, on a donc $|\alpha+\beta|^2=(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)$. Or, $|\alpha|^2=a^2+b^2$, $|\beta|^2=c^2+d^2$ et $\overline{\alpha}\beta=(a-ib)(c+id)=ac+bd+i(ad-bc)$ a pour partie réelle $ac+bd$, ce qui donne bien la formule annoncée.

   (b) Par hypothèse, on doit avoir $|f(e^{i\theta})|=1$, c'est-à-dire $|ae^{i\theta}+b|=|ce^{i\theta}+d|$. En élevant au carré et en utilisant la question précédente, $|ae^{i\theta}|^2+|b|^2+2\text{Re }(\overline{ae^{i\theta}}b)=|ce^{i\theta}|^2+|d|^2+2\text{Re }(\overline{ce^{i\theta}}d)$, soit en effet $|a|^2+|b|^2+2\text{Re }(\overline{a}be^{-i\theta})=|c|^2+|d|^2+2\text{Re }(\overline{c}de^{-i\theta})$.

   (c) Écrivons le nombre $\beta$ sous forme exponentielle $\beta=re^{i\mu}$. Pour $\theta=\mu$, on a $\beta e^{-i\theta}=re^{i\mu}e^{-i\mu}=r$, donc 2Re $(\beta e^{-i\theta}=2r$, et on doit donc avoir $\alpha+2r=0$. Si au contraire on prend $\theta=\mu+\pi$, on trouve $\beta e^{-i\theta}=re^{-i\pi}=-r$, donc on trouve la condition $\alpha-2r=0$. En additionnant ces deux équations, on trouve que $2\alpha=0$ donc $\alpha=0$, puis $2r=0$, soit $|\beta|=0$, ce qui implique $\beta=0$.
   Or, en faisant passer tout à gauche dans l'égalité de la question précédente, $|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2+2\text{Re }((\overline{a}b-\overline{c}d)e^{-i\theta})=0$. En appliquant le calcul qu'on vient d'effectuer, on a $|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2=0$ (c'est ce qui joue le rôle de $\alpha$) et $\overline{a}b-\overline{c}d=0$ (c'est notre $\beta$).

   (d) Si $a=0$, la deuxième condition ci-dessus devient $\overline{c}d=0$, donc on a soit $c=0$ soit $d=0$. Or on a supposé dès le départ que $ad-bc\neq 0$, donc on ne peut pas avoir à la fois $a=0$ et $c=0$. Il ne reste que la possibilité $d=0$, dont on déduit $|b|=|c|$. On peut alors écrire que $\frac{b}{c}\in\mathbb{U}$, c'est-à-dire que $\frac{b}{c}=e^{i\theta}$. On en déduit que $f(z)=\frac{b}{cz}=\frac{e^{i\theta}}{z}$, qui est bien de la forme étudiée à la première question.

(e) Si $a \neq 0$, on peut écrire $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}}$ en exploitant notre deuxième condition. En remettant dans la première, $|a|^2 + \left|\dfrac{\overline{c}^2 d^2}{\overline{a}^2}\right| = |c|^2 + |d|^2$, soit en multipliant tout par $|\overline{a}|^2$ (qui est égal à $|a|^2$), $|a|^4 + |c|^2|d|^2 = |a|^2|c|^2 + |a|^2|d|^2$. On fait tout passer de l'autre côté et on peut factoriser : $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$. Celà implique bien $|a|^2 = |c|^2$ (donc $|a| = |c|$ puisqu'on parle de réels positifs), ou $|a|^2 = |d|^2$.

(f) Supposons donc que $|a| = |c|$, soit $a = ce^{i\theta}$. On a alors $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{c}e^{-i\theta}} = de^{i\theta}$. Mais on a alors $ad - bc = cde^{i\theta} - cde^{i\theta} = 0$, ce qui est interdit ! On a donc $|a| = |d|$, soit $a = de^{i\theta}$, et $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \dfrac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}$ donc $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{de^{i\theta}z + \frac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}}{cz+d} = e^{i\theta}\dfrac{z + \frac{\overline{c}}{\overline{d}}}{\frac{c}{d}z + 1}$, qui est exactement de la forme étudiée à la deuxième question en posant $a = \dfrac{\overline{c}}{\overline{d}}$.