Devoir surveillé n°2

PTSI B Lycée Eiffel

13 octobre 2012

Exercice 1

Dans un repère orthonormal du plan, on considère les points $A(-1,1)$, $B(3,-2)$, $C(-1,-3)$ et $D(2,1)$.

1. Montrer que le triangle ACD est rectangle.
2. Calculer l'aire de ce triangle de deux façons : à l'aide d'un calcul de déterminant, puis directement par un produit de longueurs en utilisant le fait qu'il s'agit d'un triangle rectangle.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
4. Déterminer les équations des hauteurs issues de A et C dans le triangle ABC, en déduire les coordonnées de l'orthocentre du triangle.
5. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[BD]$ en partant de la condition d'égalité de longueurs $MB = MD$. Retrouver cette équation en déterminant les coordonnées du milieu J de $[BD]$ et en partant d'une condition d'orthogonalité.
6. Déterminer les longueurs des trois côtés du triangle ACD. On notera $a = CD$, $d = AC$ et $c = AD$.
7. Déterminer les coordonnées du point I, barycentre du système $((A,a);(C,c);(D,d))$.
8. Calculer les distances du point I aux trois côtés du triangle, et en déduire ce que représente le point I pour le triangle ACD.
9. Faire une figure et y placer tous les points et droites étudiés dans l'exercice.

Problème 1 : résolution d'équations du troisième degré

Le but de cet exercice est de présenter une méthode de résolution (faisant intervenir les nombres complexes) des équations du troisième degré.

I. Un cas particulier

On s'intéresse pour l'instant à l'équation $z^3 - 6z^2 + 9z - 1 = 0$.

1. On pose $Z = z - 2$, déterminer une équation du troisième degré vérifiée par Z.
2. On décide désormais d'écrire $Z = u + v$, développer l'équation obtenue à la question précédente et prouver que $u^3 + v^3 + 3(uv - 1)(u + v) + 1 = 0$.
3. En imposant la condition $uv = 1$, montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré $x^2 + x + 1 = 0$.
4. Résoudre cette équation, et en déduire les valeurs possibles de u et de v.
5. Déterminer les solutions de l'équation initiale.

II. Généralisation

On considère désormais une équation du troisième degré quelconque $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

1. Montrer, qu'en faisant un changement de variable du type $Z = z + k$, on peut se ramener à une équation de la forme $Z^3 + pZ + q = 0$.
2. En posant $Z = u + v$ et $uv = -\dfrac{p}{3}$, montrer que l'équation se ramène à $u^3 + v^3 + q = 0$.
3. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$, déterminer les valeurs de $U + V$ et de UV.
4. En déduire les valeurs de U et V, et expliquer comment terminer la résolution de l'équation du troisième degré initiale.
5. Résoudre à l'aide de cette méthode l'équation $z^3 - 3z^2 + (9 - 6i)z + (-5 + 12i)$.

Problème 2 : homographies du plan complexe

Une homographie est une application du plan complexe dans lui-même définie par une équation de la forme $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, où a, b, c et d sont quatre nombres complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$.

I. Un cas particulier

On étudie dans cette première partie l'application $f : z \mapsto \dfrac{iz - 1}{z + 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, et montrer que f est bijective de $\mathcal{D}_f$ vers un ensemble à déterminer, en déterminant une expression de sa réciproque.
2. Déterminer les images par f de 2 et de $1+i$ (sous forme algébrique), ainsi que leurs antécédents.
3. Déterminer les nombres complexes invariants par f.
4. Déterminer les nombres complexes z ayant une image réelle par f, puis ceux ayant une image imaginaire pure.
5. Déterminer les nombres complexes z pour lequels $f(z) \in \mathbb{U}$.
6. Montrer que l'image du demi-plan constitué de tous les nombres complexes ayant une partie imaginaire strictement positive est délimitée par une droite dont on donnera une équation cartésienne.

II. Une étude plus générale

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et f l'homographie définie par $f(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{z}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}$, $f(z) \in \mathbb{U}$.
2. On considère maintenant une homographie de la forme $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z + a}{\overline{a}z + 1}$, où a est un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{U}$. Montrer que, $\forall z \in \mathbb{U}$, $f(z)$ est bien défini, et $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. On cherche à prouver que seules les deux types d'homographies précédentes conservent le cercle trigonométrique. Soit donc une homographie $f : z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$ telle que $\forall z \in \mathbb{U}$, $f(z) \in \mathbb{U}$.
   (a) Montrer que, si α et β sont deux nombres complexes quelconques, $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}\beta)$.
   (b) Établir que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{c}de^{-i\theta})$.
   (c) Montrer que la condition $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha + 2\mathrm{Re}\,(\beta e^{-i\theta}) = 0$ implique $\alpha = \beta = 0$. En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\overline{a}b = \overline{c}d$.
   (d) Montrer que, si $a = 0$, f est du type étudié à la première question de cette deuxième partie.
   (e) Montrer que, si $a \neq 0$, $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$.
   (f) Montrer que le premier cas est impossible, et prouver que f est alors du type étudié dans la deuxième question de cette partie.