Devoir surveillé n°1

PTSI B Lycée Eiffel

22 septembre 2012

Exercice 1

1. (a) On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$.

   (b) En posant $x = \dfrac{\pi}{5}$, on aura $4x = \dfrac{4\pi}{5} = \pi - x$, donc $\cos(4x) = -\cos(x)$. Au vu de la relation précédente, on a donc $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1 = -\alpha$, soit $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + x + 1 = 0$.

   (c) La racine la plus évidente est -1 : $8(-1)^4 - 8(-1)^2 - 1 + 1 = 0$. On peut donc factoriser : $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + d$. On a donc $a = 8$; $a + b = 0$, soit $b = -8$; $b + c = -8$ soit $c = 0$; $c + d = 1$ soit $d = 1$. Soit $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)(8x^3 - 8x^2 + 1)$. Reste à trouver une deuxième racine, $x = \dfrac{1}{2}$ convient puisque $\dfrac{8}{8} - \dfrac{8}{4} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$. On peut donc à nouveau factoriser : $8x^3 - 8x^2 + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(ex^2 + fx + g) = ex^3 + \left(f - \dfrac{1}{2}e\right)x^2 + \left(g - \dfrac{1}{2}f\right)x - \dfrac{1}{2}g$. Par identification, on obtient $e = 8$; $f - \dfrac{1}{2}e = -8$, soit $f = -4$; $g - \dfrac{1}{2}f = 0$ soit $g = -2$. Finalement, $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x - 2)$.

   (d) Déterminons les racines du dernier facteur obtenu ci-dessus. Le trinome $4x^2 - 2x - 1$ (on peut factoriser par 2) a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et admet deux racines $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{20}}{8} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$. La valeur de α est donc celle d'une des quatre racines trouvées pour l'équation. Ce n'est sûrement pas -1 puisque $\alpha > 0$ (c'est le cosinus d'un angle inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$), pas non plus x_2 qui est également négative, et ça ne peut pas être $\dfrac{1}{2}$ puisqu'on sait qu'il s'agit du cosinus de l'angle $\dfrac{\pi}{3}$, et que la fonction cosinus ne peut pas prendre deux fois cette valeur avant $\dfrac{\pi}{2}$. Finalement, $\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

2. (a) Prenons plutôt les choses à l'envers : $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) = 2\sin(x)(4\cos^2(x) - 2\cos(x))$, donc pour tous les angles vérifiant $\sin(x) \neq 0$, $\dfrac{\sin(4x)}{2\sin(x)} = 4\cos^2(x) - 2\cos(x) = \cos(3x) + \cos(x)$ puisqu'on sait que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

   (b) On a donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{\sin(\frac{4\pi}{5})}{2\sin(\frac{\pi}{5})}$. Or, $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$. Finalement, $\alpha + \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}$.

   (c) À l'aide de la formule de transformation d'un produit en somme, $\alpha \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{-2\pi}{5}\right)$. Or, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$; et de même

$\cos\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$. Au vu du résultat de la question précédente, on a donc $\alpha \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$.

(d) Le réel α est donc solution de l'équation $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$, dont le discriminant est $\Delta = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$, et qui admet pour racines $x_1 = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$. Comme dans la première partie de l'exercice, on conclut pour des raisons de signe que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. On a au passage prouvé que $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 2

1. Tout ça, c'est du cours : arccos est définie sur $[-1;1]$, de dérivée $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; tanh est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\dfrac{1}{\cosh^2}$ ou $1 - \tanh^2$; arctan est déifnie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\dfrac{1}{1+x^2}$, et sinh est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée cosh.
2. Le terme $\arctan(\sinh(x))$ est défini sur $\mathbb{R}$, mais le terme $\arccos(\tanh(x))$ aussi, puisque tanh est à valeurs dans $]-1;1[$. Finalement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Un peu de courage pour la dérivée : $f'(x) = -\dfrac{1}{\cosh^2(x)} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}} + \cosh(x) \times \dfrac{1}{1+\sinh^2(x)}$.
3. Or, on sait d'une part que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, donc $\dfrac{1}{1+\sinh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$; et $1 - \tanh^2(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}} = \cosh(x)$. On en déduit que $f'(x) = -\dfrac{1}{\cosh(x)} + \dfrac{1}{\cosh(x)} = 0$. La fonction f est donc constante. Reste à en calculer une valeur simple, par exemple $f(0) = \arccos(\tanh(0)) + \arctan(\sinh(0)) = \arccos(0) + \arctan(0) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$. On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
4. Cette équation revient à avoir $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{5}{13}$, soit $13(e^x - e^{-x}) = 5(e^x + e^{-x})$, ou encore $8e^x - 18e^{-x} = 0$. Cela donne $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = \dfrac{18}{8}$, soit $e^{2x} = \dfrac{9}{4}$. On obtient pour unique solution $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{9}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.
5. On aimerait bien exploiter la fonction f. Commençons donc par calculer $\sinh\left(\ln\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{e^{\ln\frac{3}{2}} - e^{-\ln\frac{3}{2}}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{5}{12}$. Comme ça tombien bien ! On conclut donc que $\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) + \arctan\left(\dfrac{5}{12}\right) = f\left(\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3

1. La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$, et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$. Ce domaine de définition est toujours symétrique par rapport à 0, et le terme e^{-x^2} étant pair, f_n est paire si n est pair, et impaire si n est impair.
2. Lorsque $n < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} e^{-x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = +\infty$ si n est pair et $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = -\infty$ si n est impair. Pour toutes les valeurs de n (y compris positives), $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_n(x) = 0$ (c'est une application de la croissance comparée quand $n > 0$).
3. Calculons donc : $f_n'(x) = nx^{n-1} - 2x \times x^n e^{-x^2} = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$. Si $n \leqslant 0$, le terme $n - 2x^2$ est toujours négatif, le signe de f_n' dépend donc uniquement de celui de x^{n-1}. Quand n est pair négatif, la fonction f_n est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$. Si n est impair négatif, f_n est croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Si n est positif, la dérivée s'annule (outre éventuellement en 0) lorsque $x^2 = \frac{n}{2}$, donc en $x = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}$. Là encore deux cas à distinguer : si n est positif impair, f_n est décroissante sur $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$, croissante sur $\left[-\sqrt{\frac{n}{2}}; \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$, et à nouveau décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[$. Si n est positif pair, f_n est croissante sur $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$, décroissante sur $\left[-\sqrt{\frac{n}{2}}; 0\right]$, croissante sur $\left[0; \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$, et à nouveau décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[$. Dans les deux cas, on a un maximum local en $\sqrt{\frac{n}{2}}$ de valeur $f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$. Selon la parité de n, il y a un maximum ou un minimum de valeur égale ou opposée en $-\sqrt{\frac{n}{2}}$. Reste un dernier cas à traiter séparément, celui où $n = 0$: la fonction $f_0 : x \mapsto e^{-x^2}$ a simplement pour dérivée $f_0'(x) = -2xe^{-x^2}$, elle est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, avec pour maximum $f_0(0) = 1$. On obtient donc comme tableau de variations pour f_0 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_0	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour la fonction f_1 :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

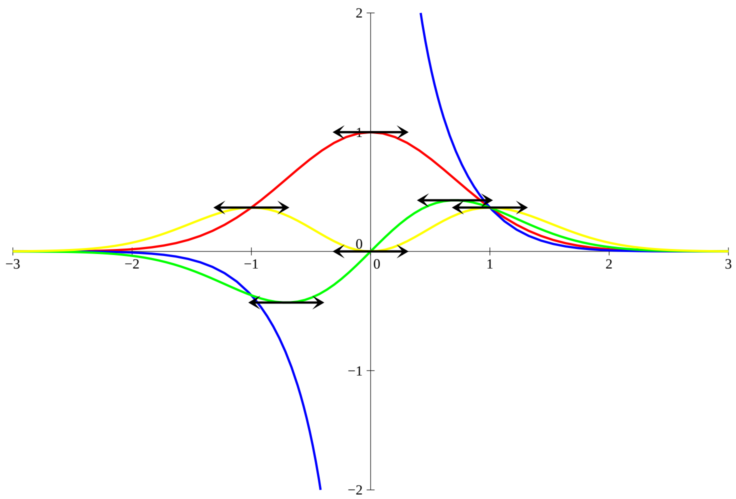
Pour la fonction f_2 :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

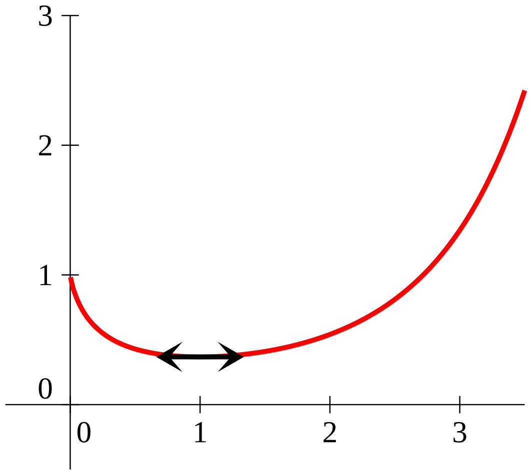
Enfin, pour f_{-1} :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

4. On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}e^{-x^2} - x^n e^{-x^2} = x^n(x-1)e^{-x^2}$. Les courbes passent par l'origine quand $n \geqslant 0$, mais surtout se coupent toutes en $x = 1$, au point d'ordonnée $\dfrac{1}{e}$. La courbe représentative de f_{n+1} est au-dessus de celle de f_n lorsque $x \geqslant 1$, en-dessous si $x \in]0;1]$. Sur $]-\infty;0[$, sans surprise, la courbe de f_{n+1} est en-dessous de celle de f_n si n est impair, au-dessus si n est pair (rien d'étonnant puisque f_n est positive sur $]-\infty;0[$ quand n est pair, et négative sinon). On peut toutefois noter que les courbes correspondant aux entiers pairs se coupent en $\left(-1;\dfrac{1}{e}\right)$ et celles correspondants aux entiers impairs en $\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$.
5. C'est évidemment un peu plus facile à faire à l'ordinateur, ça devrait ressembler à ceci (sur le corrigé en ligne, f_0 a la courbe rouge, f_1 la courbe verte, f_2 la courbe jaune et f_{-1} la courbe bleue) :



6. On introduit pour cette dernière question la fonction auxiliaire g définie par $g(x) = x^x e^{-x}$.
   (a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut l'écrire sous la forme $g(x) = e^{x\ln(x)}e^{-x} = e^{x(\ln(x)-1)}$. La fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $g'(x) = (\ln(x) - 1 + 1)e^{x(\ln(x)-1)} = \ln(x)e^{x(\ln(x)-1)}$. La fonction g est donc décroissante sur $]0;1]$, croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet pour minimum $g(1) = \dfrac{1}{e}$.
   (b) Sous la forme exponentielle, on a de façon immédiate $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, et en utilisant la croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln(x) - 1) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$. Voici une allure de courbe :



(c) On a vu que ce maximum existait pour $n \geqslant 0$ et avait pour valeur $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$, ce qui correspond exactement à la valeur de $g\left(\frac{n}{2}\right)$.

(d) Au vu des variations de la fonction g, cette valeur est minimale lorsque $\frac{n}{2} = 1$, soit $n = 2$.

Problème

I. Étude de f et de sa réciproque.

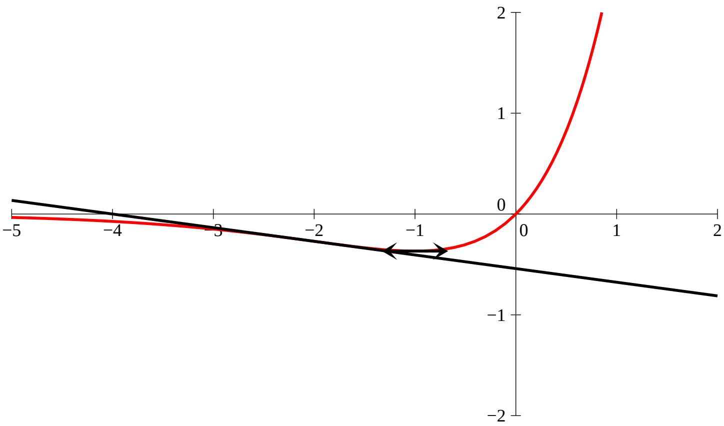
1. La fonction f a pour dérivée $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. La fonction admet donc un minimum en -1, de valeur $f(-1) = -\frac{1}{e}$. Sans difficulté, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et en appliquant directement un résultat de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2. (a) La fonction f' est dérivable, de dérivée $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Elle s'annule effectivement une seule fois, en $\alpha = -2$.

   (b) Puisque $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$ et $f'(-2) = -\frac{1}{e^2}$, la tangente a pour équation $y = -\frac{1}{e^2}(x+2) - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x+4)$. Elle coupe l'axe des abscisses pour $x =_4$.

   (c) On cherche donc à étudier le signe de $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4) = xe^x + \frac{1}{e^2}(x+4)$. Cette expression a la même dérivée seconde que f, sa dérivée $(x+1)e^x + \frac{1}{e^2}$ est donc décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme elle vaut $-\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2} = 0$ en -2, elle est donc toujours positive. L'expression $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule également en $x = -2$ (puisque la tangente y coupe la courbe représentative de f), on en déduit que la tangente est au-dessus de la courbe sur $]-\infty; -2]$, et en-dessous sur $[-2; +\infty[$.

3. Voici une allure de courbe :



4. La fonction f étant continue et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, elle y est bijective vers son intervalle image $\left[-\dfrac{1}{e};+\infty\right[$. Le théorème de la bijection donne directement le tableau de variations de g :

x	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	$+\infty$

5. En utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x)} = \dfrac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$. Or, par définition, la fonction g vérifie $g(x)e^{g(x)} = x$. On peut donc écrire, lorsque $x \neq 0$, $e^{g(x)} = \dfrac{x}{g(x)}$, et $g'(x) = \dfrac{g(x)}{x(g(x)+1)}$. En particulier, la fonction g est solution de l'équation différentielle $xy'(y+1) = y$.
6. En effet, cette équation s'écrit $e^{x\ln(2)} = x$, soit en multipliant chaque membre par $\ln(2)$, $\dfrac{x\ln(2)}{e^{x\ln(2)}} = \ln(2)$, donc $-x\ln(2)e^{-x\ln(2)} = -\ln(2)$. Autrement dit $f(-x\ln(2)) = -\ln(2)$, ce qui équivaut à $-x\ln(2) = g(-\ln(2))$, soit $x = -\dfrac{g(-\ln(2)}{\ln(2)}$.
7. On peut écrire l'équation sous la forme $e^{x\ln(x)} = 3$, soit $x\ln(x) = \ln(3)$. En posant $X = \ln(x)$, on se ramène à l'équation $f(X) = \ln(3)$, soit $X = g(\ln(3))$. On a donc $\ln(x) = e^{g(\ln(3))}$, soit $x = e^{g(\ln(3))}$.

II. Des fonctions auxiliaires.

1. La fonction h_a est évidemment dérivable, de dérivée $h_a'(x) = -e^{-x} + 2ax = e^{-x}(-1+2af(x))$, qui est du signe de $2af(x)-1$. Elle s'annule lorsque $f(x) = \dfrac{1}{2a}$ (valeur atteinte une unique fois par la fonction f), autrement dit en $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$. Son image par la fonction h est $h_a(m_a) = e^{-g(\frac{1}{2a})} + a\left(g\left(\dfrac{1}{2a}\right)\right)^2 = e^{-m_a} + am_a^2$. Or, par définition, $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$ implique $f(m_a) = \dfrac{1}{2a}$, soit $m_a e^{m_a} = \dfrac{1}{2a}$, donc $e^{-m_a} = 2am_a$, et $h_a(m_a) = 2am_a + am_a^2 = am_a(m_a+2)$.
2. Puisque $i(a) = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$, que $a \mapsto \dfrac{1}{2a}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que g est croissante sur son domaine de définition, i est une fonction décroissante. Par simple composition de limite, $\lim\limits_{a\to+\infty} i(a) = g(0) = 0$, et $\lim\limits_{a\to 0^+} i(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

3. Il suffit de constater que, si $a < b$, on aura $h_a(x) < h_b(x)$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $h_a(m_b) < h_b(m_b)$. Comme m_a est le minimum de la fonction h_a, on a également $h_a(m_a) \leqslant h_a(m_b)$, dont on déduit que $h_a(m_a) < h_b(m_b)$. La valeur du maximum est donc une fonction strictement croissante de la variable a. Reste à déterminer la limite quand a tend vers $+\infty$ de $am_a(m_a+2)$. On sait déjà que $\lim\limits_{a \to +\infty} m_a = 0$, donc $\lim\limits_{a \to +\infty} m_a + 2 = 2$. De plus, $am_a = \dfrac{1}{2}e^{-m_a}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{a \to +\infty} h_a(m_a) = 1$.