Devoir surveillé n°1

PTSI B Lycée Eiffel

22 septembre 2012

Exercice 1

Cet exercice présente deux méthodes de calcul de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Les deux questions sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Pour tout l'exercice, on pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. (a) Exprimer, pour un réel x quelconque, $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
   (b) En déduire que α est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$.
   (c) En trouvant deux racines évidentes à cette équation (l'un des deux n'est pas un nombre entier), factorisez-là.
   (d) Déterminer la valeur exacte de α.
2. (a) Démontrer la formule $\cos(x) + \cos(3x) = \dfrac{\sin(4x)}{2\sin(x)}$ (quand cela a un sens).
   (b) En déduire la valeur de $\alpha + \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$.
   (c) Calculer $\alpha \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ (on doit obtenir une valeur rationnelle simple).
   (d) En déduire une équation du second degré vérifiée par α, et sa valeur exacte (on rappelle que deux nombres dont la somme vaut S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$).

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arccos(\tanh(x)) + \arctan(\sinh(x))$.

1. Rappeler le domaine de définition et la dérivée de chacune des fonctions arccos, tanh, arctan et sinh.
2. En déduire le domaine de définition et la dérivée de f (on rappelle la formule de dérivation d'une composée : $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$).
3. Montrer que $f'(x) = 0$, et en déduire une expression très simplifiée de la fonction f.
4. Résoudre l'équation $\tanh(x) = \dfrac{5}{13}$ (donner les solutions uniquement à l'aide de la fonction ln).
5. Calculer $\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) + \arctan\left(\dfrac{5}{12}\right)$.

Exercice 3

On considère dans ce problème la famille de fonctions f_n définies par les équations $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$, où $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f_n, et étudier, en fonction de la valeur de n, la parité de la fonction f_n.

2. Déterminer les limites de f_n aux bornes de son domaine de définition (on pourra à nouveau distinguer plusieurs cas).
3. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n, et étudier les variations de la fonction f_n. On dressera en particulier un tableau de variations complet des fonctions f_0, f_1, f_2 et f_{-1}.
4. Déterminer les positions relatives des courbes représentatives des fonctions f_n et f_{n+1}. On constatera en particulier que toutes les courbes passent par un point commun.
5. Tracer dans un même repère les courbes des fonctions f_0, f_1, f_2 et f_{-1}.
6. On introduit pour cette dernière question la fonction auxiliaire g définie par $g(x) = x^x e^{-x}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g, et étudier ses variations.
   (b) Déterminer ses limites, et donner une allure de sa représentation graphique.
   (c) Exprimer la valeur du maximum de la fonction f_n (lorsqu'il y en a un) à l'aide de la fonction g.
   (d) Pour quelle valeur de n ce maximum est-il le plus petit ?

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f.
2. (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α.
   (b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α. En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
   (c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
3. Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que la fonction f est bijective de $[-1; +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g.
5. Exprimer la dérivée g' de la fonction g en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction g.
6. Montrer que l'équation $2^x = x$ admet pour solution $x = -\dfrac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$ (qu'on ne cherchera bien sûr pas à expliciter plus).
7. Exprimer de même une solution de l'équation $x^x = 3$ en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

1. Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g. Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.
2. On note enfin i la fonction $i : a \mapsto m_a$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du maximum de h_a est une fonction croissante du paramètre a, et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.