Devoir à la Maison n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

mercredi 15 mai

Problème 1

Partie I

1. La fonction f est définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

2. Puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, et on peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$.

3. Calculons donc la dérivée (ailleurs qu'en 0) : $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}$. Bon, il n'y aucun moyen évident de calculer la limite de cette dérivée en 0 (même problème si on passe directement par le taux d'accroissement). En fait, vous manquez un peu de développements limités pour faire cette question facilement, même si on peut s'en sortir avec le règle de l'Hôpital vue en exercice. Si on sait que $\ln(1+x)\ \underset{x\to 0}{x} - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, on effectue le calcul $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x - (1+x)(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{(1+x)x^2} = \dfrac{x - x + \frac{x^2}{2} - x^2 + o(x^2)}{(1+x)x^2} \sim \dfrac{-x^2}{2x^2} \sim -\dfrac{1}{2}$. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

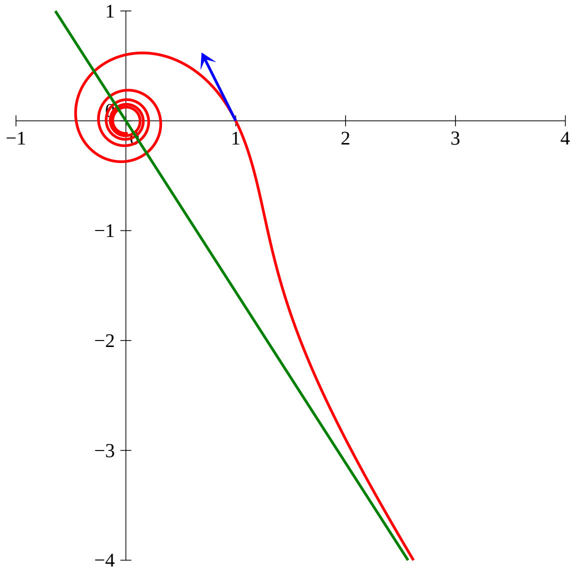
4. Commençons donc par étudier la fonction k : elle est définie et dérivable sur le même intervalle que f (y compris en 0), et $k'(x) = 1 - \ln(1+x) - \dfrac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x)$. La fonction k est donc croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme $k(0) = 0$, la fonction est toujours négative, et f' est donc du signe opposé à celui de $(1+x)x^2$, c'est-à-dire toujours négative. On calcule sans difficulté $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ (croissance comparée), pour obtenir le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0

5. (a) Puisque $\displaystyle\lim_{\theta\to+\infty}\rho(\theta) = 0$, la courbe va se rapprocher de l'origine du repère en spirale. En 0, on sait que $\rho(0) = 1$ et $\rho'(0) = -\dfrac{1}{2}$, donc la tangente au point $(1,0)$ de paramètre 0 a pour vecteur directeur $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Autrement dit, en coordonnées cartésiennes, la tangente a pour équation $y = -2(x-1) = 2 - 2x$, et a notamment pour pente -2.

   (b) On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Ici, en posant $X = 1+\theta$, $\rho(\theta)\sin(1+\theta) = \dfrac{\ln(X)\sin(X)}{X-1} \sim \dfrac{X\ln(X)}{X-1}$, qui a une limite nulle par croissance comparée. La courbe polaire a donc pour asymptote quand θ tend vers -1 la droite d'équation polaire $\theta = -1$ (qui n'est d'ailleurs pas très commode à représenter, -1 radian n'étant pas franchement un angle usuel).

(c) Voici ce que ça donne :



Partie II

1. Puisqu'on a prolongé la fonction par continuité en 0, il s'agit de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue, elle est évidemment définie.

2. Il s'agit de reconnaître une somme partielle de suite géométrique de raison $-t$, la formule en découle trivialement.

3. On constate facilement que P_n est la primitive s'annulant en 0 de $1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}$ (dérivez P_n si vous n'êtes vraiment pas convaincus), donc en réutilisant le résultat de la question précédente, $P_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} + \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt = \ln(1+x) + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt$ (que de questions triviales dans ce sujet, ça fatiguerait presque).

4. Lorsque $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$, donc $|R_n(x)| = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \leqslant \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

5. Calculons donc $Q'_n(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^{n-1}}{n}$. Incroyable mais vrai c'est exactement $\dfrac{P_n(x)}{x}$.

6. D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_0^1 Q'_n(x)\, dx - L = Q_n(1) - Q_n(0) - L$. Comme Q_n s'annule en 0, l'inégalité $|Q_n(1) - L| = \left|\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\, dx\right| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\, dx$ en découle. Par ailleurs, d'après la question précédant la précédente, $|g_n(x)| = \dfrac{|P_n(x) - \ln(1+x)|}{|x|} = \dfrac{|R_n(x)|}{x} \leqslant \dfrac{x^n}{n+1}$, donc $\displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{(n+1)^2}$. On en déduit immédiatement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |Q_n(1) - L| = 0$, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n(1) = L$.

7. Vu l'inégalité obtenue à la question précédente, ce sera le cas dès que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant 10^{-4}$, soit $n + 1 \geqslant 10^2$, donc $n \geqslant 99$.

Partie III

1. C'est trivial, puisqu'il s'agit d'un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. On connait déjà la valeur de $f'(x) = \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2} = \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, calculons $f''(x) = -\dfrac{1+2x}{x^2(1+x)^2} - \dfrac{\frac{x^2}{1+x} - 2x\ln(1+x)}{x^4} = \dfrac{-1-2x}{x^2(1+x)^2} - \dfrac{1}{(1+x)x^2} + 2\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$.

3. Nous allons évidemment procéder par récurrence. C'est vrai au rang 1 et même au rang 2 d'après la question précédente (il suffit de mettre au même dénominateur les deux premiers termes obtenus pour f'', si on le suppose au rang n, alors $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{T_n'(x)(1+x)^n x^n - nT_n(x)(1+x)^{n-1}x^n - nT_n(x)(1+x)^n x^{n-1}}{(1+x)^{2n}x^{2n}}$ $+a_n\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1+x} - (n+1)x^n\ln(1+x)}{x^{2n+2}} = \dfrac{T_n'(x)x(1+x) - nT_n(x)(2x+1) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} - (n+1)a_n\dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$, qui est bien de la forme souhaitée. Précisons au passage que le réel a_n est en fait toujours un entier (qu'on peut même expliciter facilement), ça va servir juste après.

4. C'est une récurrence triviale : ça marche au rang 1, et si on le suppose au rang n, alors $T_{n+1} = x(1+x)T_n' - n(1+2x)T_n + a_n(1+x)^n$ a tous ses coefficients entiers puisque chacun des termes qui le constitue est à coefficients entiers.

5. Tentons donc d'appliquer Leibniz avec $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$. On obtient sans peine $u^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ (pour $k \geqslant 1$) et $h^{(k)}(x) = (-1)^k\dfrac{k!}{x^{k+1}}$. On obtient alors $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!\ln(1+x)}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}(-1)^{n-k}\dfrac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}$ en isolant le terme correspondant à $k=0$. La somme se simplifie en $(-1)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n!(1+x)^{n-k}x^{k-1}}{k(1+x)^n x^n}$, ce qui donne par identification $T_n(x) = (-1)^{n-1}n!\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(1+x)^{n-k}x^{k-1}}{k}$. Pour $n=2$, on trouve $T_2(x) = -2\left(1+x+\dfrac{x}{2}\right) = -2-3x$, qui correspond bien à la dérivée seconde obtenue plus haut.

Problème 2

Partie I

1. En fait, inutile de faire des calculs explicites : ${}^tA = A$, donc ${}^tAA = A{}^tA = A^2$; et ${}^tC = -C$, donc ${}^tCC = C{}^tC = -C^2$. Plus généralement, toutes les matrices symétriques et antisymétriques vérifient la relation $(\star)$.

2. On trouve $A^2 = I$, toutes les puissances de A seront donc alternativement égales à A et à I, qui vérifient toutes deux la relation.

3. Puisque $A^2 = I$, A est inversible et $A^{-1} = A$.

4. On peut expliciter $u(x,y) = (y,x)$, donc $u(1,0) = (0,1)$ et $u(0,1) = (1,0)$. Puisque $A^2 = I$, $u \circ u = id$, et u est bien une symétrie. Les vecteurs invariants par u sont solutions du système défini par les équations $y = x$ et $x = y$. Ce sont donc tous les vecteurs (x,x), ou si on préfère $\mathrm{Vect}((1,1))$.

5. La matrice U est symétrique, je renvoie donc à la question 1. On calcule sans problème $U^2 = 2U$, puis on prouve par une récurrence triviale que $U^n = 2^{n-1}U$: c'est vrai au rang 1, et en le

supposant vrai au rang n, alors $U^{n+1} = U^n \times U = 2^{n-1}U^2 = 2^n U$. Un multiple d'une matrice vérifiant la relation ($\star$) la vérifie aussi, donc U^n la vérifie.

6. Considérons donc $A+C$, sa transposée est $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on calcule sans l'ombre d'une difficulté $(A+C)^t(A+C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, mais ${}^t(A+C)(A+C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque E_2 n'est pas stable par somme, ce n'est pas un sous-espace vectoriel.
7. Notons donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on calcule $M^tM = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$ et ${}^tMM = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$. Manifestement, les deux matrices sont égales si et seulement si $b^2 = c^2$ et $ab+cd = ad+bc$.
8. La relation précédente équivaut à $b = c$ (dans ce cas, la deuxième équation est toujours vérifiée) ou $b = -c$ et $a - d = d - a$, soit $d = a$. La matrice M est donc au choix symétrique, donc appartenant à $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ ou de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, donc appartenant à $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (qu'on peut résumer par $\text{Vect}(I, C)$
9. Il faut trouver deux matrices de E_2 n'appartenant pas au même sous-espace vectoriel, et qui ne commutent pas (et encore, ça ne suffit pas toujours), par exemple U et C : $UC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas dans E_2 puisque pas symétrique et ayant des coefficients diagonaux différents.

Partie II

1. Je m'étendrai pas sur la difficulté extrême de cette question : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On calcule $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule sans plus de difficulté $S^tS = {}^tSS = I$, et $S^2\ {}^tS^2 = {}^tS^2S^2 = I$.
3. C'est un calcule facile : $(aI + bS + cS^2)(aI + b^tS + c^tS^2) = a^2I + b^2S^tS + c^2S^2\ {}^tS^2 + ab(S +^t S) + AC(S^2 +^t S^2) + bc(S^tS^2 + S^2\ {}^tS)$. En exploitant les calculs de la question précédente, cela se simplifie en $(a^2+b^2+c^2)I + (ab+bc)(S +^t S) + (ac(S^2 +^t S^2))$. Le calcul de ${}^t(aI + bS + cS^2)(aI + bS + cS^2)$ donne exactement la même chose.
4. Ben oui, on vient de prouver qu'il contient $\text{Vect}(I, S, S^2)$, qui est sûrement de dimension 3 puisque la famille est libre (il n'y qu'à regarder les matrices, elles ont des coefficients non nuls à des endroits différents).
5. Il suffit de constater que $S^3 = -I$, et calculer $(aI + bS + cS^2)(dI + eS + fS^2) = adI + (ae + bd)S + (af + be + cd)S^2 + (bf + ce)S^3 + cfS^4 = (ad - bf - ce)I + (ae + bd - cf)S + (af + be + cd)S^2$.

Partie III

1. On calcule un peu plus péniblement que dans les parties précédentes $B^tB = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, puis ${}^tBB = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Toutes les conditions nécessaires à l'égalité des deux produits se ramènent à l'unique condition $a = -1$ (très suprenant au vu de la suite de l'énoncé).

2. Le noyau de u s'obtient en résolvant le système constitué des équations $x-y+z+t = -x+t = x-t = x+y-z+t = 0$, ce qui donne $x = t$ (les deux équation médianes sont équivalentes), et $2x+z-y = 2x+y-z = 0$. En soustrayant, $2z-2y = 0$, soit $z = y$, puis $2x = 0$, donc $x = 0 = t$. Finalement, $\ker(u) = \{(0, y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0, 1, 1, 0))$. On obtient beaucoup plus rapidement $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((1, -1, 1, 1); (-1, 0, 0, 1); (1, 1, -1, 1))$ (on enlève l'image du troisième vecteur de la base canonique, qui est opposée à celle du deuxième, et on garde les trois autres puisque, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 4 - \dim(\ker(u)) = 3$.

3. On calcule donc $u(1, 1, -1, -1) = (-2, -2, 2, 2)$ (par exemple en multipliant le vecteur colonne correspondant à gauche par B). On constate que l'image est proportionnelle au vecteur dont on est parti.

4. Encore du calcul palpitant : $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. Puisque la famille est constituée de quatre vecteurs dans un espace de dimension 4, il suffit de vérifier qu'elle est libre, ce qui se fait en résolvant le système $\begin{cases} b + c + d = 0 \\ a + b - d = 0 \\ a - b + d = 0 \\ -b + c - d = 0 \end{cases}$.
La somme des deux équations extrêmes donne directement $c = 0$, celle des deux équations du milieu $a = 0$. La première équation devient alors $d = -b$, et la deuxième $d = b$, la seule solution est la solution nulle et la famille est libre. Le seul vecteur dont on ne connaisse pas l'image par u est le premier, mais il est dans le noyau. Les trois autres ont des images proportionnelles à eux-même, avec coefficients respectifs -2, 2 et 2, donc la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, qu'on va tout de suite appeler Δ puisque la matrice est diagonale. Assez curieusement, la formule de changement de base est donnée dans le mauvais sens, mais peu importe puisque $B = P\Delta P^{-1}$ est équivalent à $\Delta = P^{-1}\Delta P$, ce qui veut dire que la matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$, soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Allez, une petit récurrence, c'est vrai au rang 1, et en le supposant au rang n, alors $B^{n+1} = B^n \times B = P\Delta^n P^{-1} P \Delta P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Il suffit alors d'essayer de simplifier les puissances de Δ : $\Delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; puis, en distinguant puissances paires et impaires, $\Delta^{2p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p} \end{pmatrix} = 2^{2p-2}\Delta^2$; et $\Delta^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{2p+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p+1} \end{pmatrix} = 2^{2p}\Delta$. On en déduit facilement que $B^{2p} = P(2^{2p-2}\Delta^2)p^{-1} = 2^{2p-2}B^2$, et $B^{2p+1} = 2^{2p}B$. Pour information, il s'agissait du sujet commun des Petites Mines 2010.