Devoir à la Maison n°9

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le mercredi 15 mai

Ce sujet est un sujet de révisions tiré d'une annale de concours récente (et à peine modifiée). Le sujet est donc faisable en quatre heures, et porte sur toutes les parties du programme.

Problème 1

Partie I

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité que l'on continuera à noter f.
3. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$. Calculer par ailleurs la dérivée f' de la fonction f.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. On pourra utiliser la fonction auxiliaire $k : x \mapsto x - (1+x)\ln(1+x)$.
5. On considère la courbe Γ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$.
   (a) Préciser l'allure de Γ lorsque θ tend vers $+\infty$, ainsi que le coefficient directeur de la tangente au point de paramètre $\theta = 0$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{\theta \to -1} \rho(\theta)\sin(\theta+1)$. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe Γ quand θ tend vers -1.
   (c) Tracer l'allure de Γ, en faisant apparaitre la tangente et l'asymptote évoquées aux questions précédentes.

Partie II

On s'intéresse dans cette partie à l'intégrale $L = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.

Pour tout entier naturel n, on note $P_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n}$, et $Q_n(X) = X - \dfrac{X^2}{4} + \dfrac{X^3}{9} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n^2}$.

1. Expliquer pourquoi l'intégrale L est bien définie.
2. Justifier que $\forall t \in [0;1]$, $1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$.
3. En déduire que $\forall x \in [0;1]$, $P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt$.

   On notera désormais, pour $x \in [0;1]$, $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt$.
4. Établir la majoration $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

5. Comparer, pour $x \in]0;1]$, $Q'_n(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.
6. En notant g_n l'application définie sur $]0;1]$ par $g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, et par $g_n(0) = 0$, montrer que $|Q_n(1) - L| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n(1)$.
7. Déterminer un entier N tel que $Q_N(1)$ soit une approximation de L à 10^{-4} près.

Partie III

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f, que l'on note $f^{(n)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer $f''(x)$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un polynôme T_n à coefficients réels, et un réel a_n, tels que $f^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$.
4. Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers.
5. En utilisant la formule de Leibniz, calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de T_n sans chercher à expliciter ses coefficients. Vérifier cette expression pour $n = 2$.

Problème 2

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient ${}^tMM = M\,{}^tM$ (on notera cette relation $(\star)$ dans la suite de l'énoncé).

Partie I

Dans cette partie, toutes les matrices considérées seront dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note en particulier $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et C vérifient la relation $(\star)$.
2. Calculer A^2. En déduire que, pour tout entier naturel n, A^n vérifie la relation $(\star)$.
3. Montrer que A est inversible. On note u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique.
4. Calculer $u(1,0)$ et $u(0,1)$. Montrer que u est une symétrie et préciser l'ensemble des vecteurs invariants par u. On note pour la suite $U = A + I$.
5. Montrer que la matrice U vérifie la relation $(\star)$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists \alpha_n \in \mathbb{R}$, $U^n = \alpha_n U$. En déduire que toutes ses puissances U^n vérifient la relation $(\star)$.
6. On note E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $(\star)$. En considérant la matrice $A + C$, montrer que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Étant donnée une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur ses coefficients pour qu'elle appartienne à E_2.
8. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont on donnera une base.
9. Le produit de deux matrices de E_2 est-il toujours dans E_2 ?

Partie II

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit f l'endomorphisme vérifiant $f(1,0,0) = (0,0,-1)$; $f(0,1,0) = (1,0,0)$ et $f(0,0,1) = (0,1,0)$, et S sa matrice dans la base canonique. On note E_3 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $(\star)$.

1. Écrire la matrice S.
2. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 appartiennent à E_3.
3. Montrer que, pour tous réels a, b et c, la matrice $R = a + bS + cS^2$ appartient à E_3.
4. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que lon notera F.
5. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

Partie III

On se place à présent dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on définit la matrice B par $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base cononique est B. On note E_4 l'ensemle des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $(\star)$.

1. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$. On pose pour la suite $a = -1$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Calculer $u(1,1,-1,-1)$. Que remarque-t-on ?
4. Calculer $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((0,1,1,0);(1,1,-1,-1);(1,0,0,1);(1,-1,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. En déduire l'existence d'une matrice inversible P que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale (on ne demande pas de préciser P^{-1}).
6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et de B^{2p+1} en fonction de B et de B^2.