# Devoir à la Maison n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

mardi 16 avril

## Problème

## I. Une somme directe intéressante.

1. Comme $f$ et $id$ commutent, on peut calculer $p^2 = \left(\frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,id\right)^2 = \frac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + +\frac{1}{9}\,id = \frac{2}{9}(f + id) + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}\,id = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,id = p$. L'application $p$ est donc un projecteur.
2. Puisque $p$ est un projecteur, son image est constituée des vecteurs $x$ vérifiant $p(x) = x$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = x$. On en déduit très facilement que la condition est équivalente à avoir $f(x) = x$.
3. Pour tout vecteur $x$, on peut écrire $p(x) + q(x) = x$. En effet, si on écrit $x$ sous la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(p)$, alors $p(x) = x_2$ et $q(x) = x_1$, donc $p(x) + q(x) = x_1 + x_2 = x$. Autrement dit, $q = id - p$. Comme par ailleurs $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,id$ implique $id = 3p - 2f$, on en déduit que $q = 3p - 2f - p = 2p - 2f$.
4. On sait que, $p$ étant un projecteur, $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. On a vu à la question 2 que $\mathrm{Im}(p) = \{x \mid f(x) = x\} = \ker(f - id)$. Par ailleurs, $\ker(p) = \mathrm{Im}(q)$. Comme $q$ est un projectur, $\mathrm{Im}(q) = \{x \mid q(x) = x\} = \{x \mid 2p(x) - 2f(x) = x\}$. Or, $2p(x) - 2f(x) = \frac{4}{3}f(x) + \frac{2}{3}x - 2f(x)$, donc $2p(x) - 2f(x) = x \Leftrightarrow -\frac{2}{3}f(x) = \frac{1}{3}x$, ou encore $f(x) = -\frac{1}{2}x$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(q) = \ker\left(f + \frac{1}{2}\,id\right)$, ce qui donne bien l'égalité souhaitée.
5. Le polynôme admet 1 comme racine évidente et se factorise sous la forme $(X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$. On peut conjecturer que, pour tout endomorphisme $f$ vérifiant une relation du type $af^2 + bf + c = 0$, on aura $E = \ker(f - x_1\,id) \oplus \ker(f - x_2\,id)$, où $x_1$ et $x_2$ sont les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$ (dans le cas où ce polynôme admet deux racines réelles). En fait, ce résultat se généralise encore largement : si $f$ est annulé par un polynôme $P$ admettant pour racines $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, alors $E = \ker(f - \alpha_1\,id) \oplus \cdots \oplus \ker(f - \alpha_k\,id)$, mais il faut pour comprendre cette égalité connaitre les sommes directes de plus de deux sous-espaces vectoriels, que nous n'avons pas étudiées cette année.

## II. Expression des puissances de $f$.

1. Tentons une démonstration par récurrence. Au rang 0, $f^0 = id$ et $p + q = id$ (résultat utilisé plus haut), donc la relation est vraie. Supposons-là vérifiée au rang $n$, alors $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n f \circ q$. Or, $f \circ p = \frac{2}{3}f^2 + \frac{1}{3}f = \frac{1}{3}(f + id) + \frac{1}{3}f = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,id = p$ ; et $f \circ q = f \circ (2p - 2f) = 2p - 2f^2 = 2p - f - id$. En utilisant $id = 3p - 2f$, on trouve $f \circ q = -p + f = -\frac{1}{2}(2p - 2f) = -\frac{1}{2}q$.

en reportant ces deux égalités dans notre calcul précédent, on trouve $f^{n+1} = p + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} q$, ce qui est bien la formule attendue au rang $n+1$. Par principe de récurrence, elle est donc valable pour tout entier $n$.

2. Reprenons la relation initiale $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + id)$. On peut l'écrire sous la forme $f \circ \left(f - \dfrac{1}{2}\, id\right) = \dfrac{1}{2}\, id$, ou encore $f \circ (2f - id) = id$. L'application $f$ est donc bijective, de réciproque $f^{-1} = 2f - id$.

3. La relation nous donnerait $f^{-1} = p + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1} q = p - 2q$. Or, $p - 2q = p - 2(2p - 2f) = 4f - 3p = 4f - 2f - id = 2f - id$. La relation reste donc valable pour $n = -1$. Pour regarder ce qui se passe pour un $n$ négatif quelconque, on peut refaire une récurrence. On vient de vérifier que, pour $n = -1$, la formule était vraie. Supposons-là au rang $-n$ (si ça vous choque vraiment de faire une récurrence sur des entiers négatifs, vous appelez $Q_n$ la propriété $f^{-n} = p + (-2)^n q$), et calculons $f^{-n-1} = f^{-1} \circ f^{-n} = (2f - id) \circ (p + (-2)^n q) = 2f \circ p + (-2)^n (2f \circ q) - p - (-2)^n \circ q$. En utilisant les relations $f \circ p = p$ et $f \circ q = -\dfrac{1}{2} q$, on trouve $f^{-n-1} = 2p - (-2)^n q - p - (-2)^n q = p + (-2)^{n+1} q$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Celle-ci reste donc valable pour tous les entiers relatifs. On pouvait aussi, alternativement, prouver que la formule donnait bien pour $-n$ la réciproque de $f^n$, autrement dit que $\left(p + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q\right) \circ (p + (-2)^n q) = id$. En effet, cette expression se développe en $p^2 + (-2^n) p \circ q + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q \circ p + q$. Or, $p \circ q = p \circ (2p - 2f) = \left(\dfrac{2}{3} f + \dfrac{1}{3}\, id\right)\left(-\dfrac{2}{3} f + \dfrac{2}{3}\, id\right) = -\dfrac{4}{9} f^2 + \dfrac{2}{9} f + \dfrac{2}{9}\, id = 0$ puisque $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + id)$. De même, $q \circ p = 0$ (tout celà commute puisqu'on peut tout exprimer en fonction de $f$ et de $id$). Il ne reste donc de notre calcul que $p + q$, qui est bien égal à l'identité.

# III. Un exemple concret.

1. D'après l'énoncé, $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on calcule donc $M^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Comme $M + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on constate bien l'égalité $M^2 = \dfrac{1}{2}(M + I)$, d'où découle $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + id)$.

2. Appartenir à $\ker(f - id)$ est équivalent à vérifier l'équation $f(x) = x$, ce qui nous mène au système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & z & = & x \\ -\frac{3}{2}x & + & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & y \\ -3x & + & y & + & 2z & = & z \end{array}\right.$. Quitte à multiplier la deuxième équation par deux, les trois équations se ramènent à $-3x + y + z = 0$, soit $z = 3x - y$. Autrement dit, $\ker(f - id) = \{(x, y, 3x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1, 0, 3); (0, 1, -1))$.
De même, le deuxième noyau se calcule en résolvant $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & z & = & -\frac{1}{2}x \\ -\frac{3}{2}x & + & \frac{3}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2}y \\ -3x & + & y & + & 2z & = & -\frac{1}{2}z \end{array}\right.$. Multiplions partout par 2 et passons tout à gauche pour obtenir $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ -6x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$.

La différence des deux premières équations donne $2y - z = 0$, et $2L_1 - L_3$ donne $2y - z = 0$ aussi. Sans surprise, le système n'est donc pas de Cramer, on peut exprimer $z = 2y$, puis $3x = 2y + 2z = 6y$, donc $x = 2y$. Finalement, $\ker\left(f + \frac{1}{2}id\right) = \{(2y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Vect((2, 1, 2))$.

3. Notons $P$ et $Q$ les matrices respectives des deux projecteurs dans la base canonique. On calcule $P = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$, puis $Q = 2P - 2M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (ou plus simplement $Q = I - P$ pour le même résultat). Autrement dit, si on tient vraiment à donner les expression analytiques, $p(x, y, z) = \left(-x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z; -x + \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}z; -2x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{3}z\right)$, et $q(x, y, z) = \left(2x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z; x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z; 2x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z\right)$.

4. D'après les calculs de la deuxième partie, $f^n(x) = p(x) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q(x)$. On va se contenter d'écrire sa matrice $M^n = \begin{pmatrix} -1 - (-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{2}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n) & \frac{2}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n) \\ -1 + (-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3}(4 - (-\frac{1}{2})^n) & \frac{1}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n) \\ -2 - (-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{2}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n) & \frac{1}{3}(5 + (-\frac{1}{2})^{n-1}) \end{pmatrix}$.

5. Si on applique la formule précédente, on devrait trouver $M^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (faites attention aux $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, qui valent alors $(-2)^2 = 4$). Eh bien, vérifions :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -30 & 20 & 10 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 5L_3 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -30 & 20 & 10 \\ 60 & -20 & -30 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/10 \\ L_3 \leftarrow -L_3/10 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad = M^{-1}$$

Le pivot n'a sûrement pas été appliqué de façon optimale mais en tout cas ça marche !