Devoir à la Maison n°8

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le mardi 16 avril

Problème

Dans tout ce problème, on s'intéresse aux propriétés d'un endormorphisme f sur un espace vectoriel réel E, vérifiant $f \circ f = \frac{1}{2}(f + id_E)$. On notera $f \circ f = f^2$ dans tout le problème.

I. Une somme directe intéressante.

On note p l'endormorphisme de E défini par $p = \frac{2}{3} f + \frac{1}{3}\, id_E$.

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Vérifier que $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.
3. On note q le projecteur sur $\ker(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$, exprimer q comme combinaison linéaire de f et de p.
4. En déduire que $E = \ker(f - id_E) \oplus \ker\left(f + \frac{1}{2}\, id_E\right)$.
5. Factoriser le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$. Conjecturer une généralisation du résultat prouvé dans cette première partie.

II. Expression des puissances de f.

1. Montrer, en utilisant les résultats de la première partie, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$.
2. Montrer que f est un automorphisme de E.
3. La relation obtenue pour f^n reste-t-elle valable si $n = -1$? Plus généralement si $n \in \mathbb{Z}$?

III. Un exemple concret.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = \left(-2x + y + z; -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z; -3x + y + 2z\right)$. On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer M^2, et en déduire que $f^2 = \frac{1}{2}(f + id_{\mathbb{R}^3})$.
2. Déterminer $\ker(f - id)$ et $\ker\left(f + \frac{1}{2}\, id\right)$, et donner une base de chacun de ces deux noyaux.
3. Déterminer l'expression des projecteurs p et q tels que définis dans la première partie.
4. En déduire l'expression de f^n, et celle de M^n.
5. Calculer M^{-1} à l'aide du pivot de Gauss, et vérifier la cohérence avec les résultats précédents.