Devoir à la Maison n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

20 mars 2013

Problème

I. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculons donc $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}+\frac{1}{3} & \frac{2}{9}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{4} & \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$. En étudiant attentivement les coefficients non diagonaux, on se convainc que $a = \dfrac{5}{6}$ (mais oui, $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{9}$). Ensuite, $A^2 - \dfrac{5}{6}A = \dfrac{1}{6}I$. On trouve donc $A^2 = \dfrac{5}{6}A + \dfrac{1}{6}I$.
2. C'est évidemment une récurrence classique : c'est vrai au rang 2 d'après la question précédente mais aussi au rang 1 en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$; et même au rang 0 puisque $A^0 = I = 0 \times A + 1 \times I$. Supposons donc $A^n = a_nA + b_nI$, alors $A^{n+1} = A^n \times A = (a_nA + b_nI) \times A = a_nA^2 + b_nA = a_n\left(\dfrac{5}{6}A + \dfrac{1}{6}I\right) + b_nA = \left(\dfrac{5}{6}a_n + b_n\right)A + \dfrac{1}{6}a_nI$. La relation est vérifiée au rang $n+1$, elle est donc vrai pour tout entier n.
3. Les relations de récurrence découlent de la question précédente : $a_{n+1} = \dfrac{5}{6}a_n + b_n$, et $b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n$. On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{5}{6}a_{n+1} + b_n = \dfrac{5}{6}a_{n+1} + \dfrac{1}{6}a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{5}{6}x - \dfrac{1}{6}$ a pour racine évidente 1, et pour deuxième racine $-\dfrac{1}{6}$ puisque le produit des racines vaut $-\dfrac{1}{6}$. On en déduit que a_n peut se mettre sous la forme $a_n = \alpha + \beta\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$. À l'aide des valeurs initiales, on va déterminer α et β : pour $n = 0$, $a_0 = \alpha + \beta = 0$; et $a_1 = \alpha - \dfrac{\beta}{6} = 1$. Autrement dit $\alpha + \dfrac{\alpha}{6} = 1$, donc $\alpha = \dfrac{6}{7}$, puis $\beta = -\dfrac{6}{7}$. On obtient donc $a_n = \dfrac{6}{7}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right)$, puis $b_n = \dfrac{1}{6}a_{n-1} = \dfrac{1}{7}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right)$ (la formule fonctionne également quand $n = 0$ puisqu'elle donne bien $b_0 = 1$).
4. On sait que $A^n = a_nA + b_nI$, ce qui permet d'écrire, si on y tient vraiment,
$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7}(-\frac{1}{6})^n & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}(-\frac{1}{6})^n \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7}(-\frac{1}{6})^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}(-\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}$.
5. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$, tous les coefficients de la matrice précédente ont une limite finie, la suite de matrices (A^n) converge donc vers $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$, qui est bien une matrice stochastique puisque $\dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{7} = 1$.

II. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On calcule bêtement $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $J^3 = J^2$, et on en déduit que, $\forall n \geqslant 2$, $J^n = J^2$.

2. On remarque aisément que $B = \dfrac{1}{2}(I + J)$. Les matrices I et J commutant bien entendu, on peut écrire, lorsque $n \geqslant 2$, que $B^n = \dfrac{1}{2^n}(J + I)^n = \dfrac{1}{2}^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k}$. Il faut isoler les termes correspondant à $k = 0$ et $k = 1$ pour pouvoir écrire $J^k = J^2$ dans tout le reste de la somme, on trouve alors $B^n = \dfrac{1}{2}^n \left(I + nJ + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} J^2 \right)$. Comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, on peut simplifier : $B^n = \dfrac{1}{2^n}(I + nJ + (2^n - n - 1)J^2) = \dfrac{1}{2}^n I + \dfrac{n}{2^n} J + \left(1 - \dfrac{n+1}{2^n}\right) J^2$. Si on tient à écrire la matrice explicitement, $B^n = J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^n} & 1 - \frac{n+1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Là encore, aucune difficulté pour trouver la limite de chacun des coefficients, on trouve $\lim\limits_{n \to +\infty} B^n = J^2$, qui est bien une matrice stochastique.

III. Étude générale des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Si $a = b = 1$, la matrice A n'est autre que l'identité, toutes se spuissances sont donc égales à I. Si $a = b = 0$, par contre, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $A^2 = I$, puis $A^3 = A$, et la suite des puissances de A est 2-périodique : si n est pair, $A^n = I$, si n est impair, $A^n = A$. C'est le seul cas où la suite ne converge pas.

2. Calculons donc : $A - I = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix}$, et $A - (a+b-1)I = \begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix}$. Le produit de ces deux matrices donne $P(A) = 0$ (on a pour chaque coefficient une somme de deux termes opposés.

3. La polynôme P étant de degré 2, on peut écrire la division sous la forme $X^n = PQ + a_n X + b_n$. On regarde ce que donne cette égalité pour les deux racines du polynôme P, à savoir 1 et $a + b - 1$: $1 = a_n + b_n$ et $(a + b - 1)^n = a_n(a + b - 1) + b_n$. En soustrayant les deux équations, on trouve $a_n(a + b - 2) = (a + b - 1)^n - 1$, soit $a_n = \dfrac{(a + b - 1)^n - 1}{a + b - 2}$. On en déduit $b_n = 1 - a_n = \dfrac{a + b - 1 - (a + b - 1)^n}{a + b - 2}$. En conclusion, le reste recherché vaut $\dfrac{(a + b - 1)^n - 1}{a + b - 2} X + \dfrac{a + b - 1 + (a + b - 1)^n}{a + b - 2}$.

4. Puisque $P(A) = 0$, on peut déduire des calculs précédents que $A^n = \dfrac{(a + b - 1)^n - 1}{a + b - 2} A + \dfrac{a + b - 1 + (a + b - 1)^n}{a + b - 2} I$

5. On peut écrire les quatre coefficients de la matrice A^n, ou plus simplement passer directement à la limite dans l'égalité précédente. Puisque $a \leqslant 1$, $b \leqslant 1$, et qu'on a éliminé le cas $a = b = 1$, on aura toujours $a + b - 1 < 1$ (et $a + b - 1 > -1$ puisque les deux nombres sont positifs et ne sont pas tous les deux nuls), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + b - 1)^n$. La suite (A^n) a donc pour limite $\dfrac{a + b - 1}{a + b - 2} I - \dfrac{1}{a + b - 2} A$, ou encore $\dfrac{1}{a + b - 2} \begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est bien

stochastique pusique la somme des coefficients de chaque ligne vaut $\dfrac{a+b-2}{a+b-2} = 1$ (et que tous les coefficients de la matrice sont bien positifs, le coefficient $\dfrac{1}{a+b-2}$ étant négatif.

IV. Une étude plus générale.

1. Il suffit de constater que si la matrice A est stochastique, toutes ses puissances seront stochastiques. En effet, le produit de deux matrices stochastiques est stochastique : $\sum_{j=1}^n (AB)_{ij} = \displaystyle\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\left(\sum_{j=1}^n b_{kj}\right)$. Par hypothèse, si B est stochastique, quelle que soit la valeur de k, $\displaystyle\sum_{j=1}^n b_{kj} = 1$, donc il ne reste que $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$ puisque A est stochastique.
   Le fait que A^n est toujours stochastique est alors une récurrence immédiate : c'est vrai pour A par hypothèse, et si c'est pour A^n, le produit $A^n \times A$ est un produit de deux matrices stochastiques est stochastique. Autrement dit, la somme des coeffients de la ligne numéro i sur A^n est toujours égale à 1. Si on suppose que chacun de ces coefficients a une limite finie b_{ij} lorsque n tend vers $+\infty$, par somme de limite, on aura certainement $\displaystyle\sum_{j=1}^n b_{ij} = 1$, et la matrice B sera donc stochastique.
   Pour prouver que $B^2 = B$, on peut constater la chose suivante : si (A^n) a pour limite B, alors $(A^{2n}) = ((A^n)^2)$ aura pour limite B^2. C'est une simple conséquence du fait que les coefficients du carré d'une matrice sont obtenus à partir de ceux de la matrice à l'aide de sommes et de produits et que ces opérations sont conservées par passage à la limite (faites une démonstration formelle si vous le souhaitez). Or, la suite (A^{2n}) est une sous-suite de la suite (A^n) qui converge vers B, donc elle converge aussi vers B (si vous n'êtes pas convaincu par le fait qu'on puisse affirmer celà sur une suite de matrices, songez qu'on est simplement en train de faire cette affirmation sur chacune des n^2 suites de réels constitués de chacun des coefficients de la matrice A^n). Conclusion $B^2 = B$ puisque les deux matrices sont limites d'une même suite.
   Pour montrer que $AB = BA$, plein de possiblités, une notamment utilise le même genre d'astuce que pour $B^2 = B$. La sous-suite (A^{n+1}) converge certainement vers B. Or, $A^{n+1} = A \times A^n$ converge aussi vers AB, donc $B = AB$. De même, $A^{n+1} = A^n \times A$, donc $BA = AB = B$ (c'est même plus fort que ce qui était demandé).
2. Ce n'est pas si compliqué que ça en a l'air. Quand on effectue le produit $A \times A^p$, $(A^{p+1})_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{ik}(A^p)_{kj} \geqslant \sum_{k=1}^n a_{ik}\alpha_j^{(p)}$ puisque tous les coefficients $(A^p)_{kj}$ sont plus grands que $\alpha_j^{(p)}$ par définition de $\alpha_j^{(p)}$. Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$ puisque la matrice A est stochastique, donc $(A^{p+1})_{ij} \geqslant \alpha_j^{(p)}$.
   Autrement dit, tous les coefficients de la colle j dans A^{p+1} sont plus grands que $\alpha_j^{(p)}$. A fortiori le plus petit d'entre eux, d'où $\alpha_j^{(p+1)} \geqslant \alpha_j^{(p)}$. On démontre de la même façon que $\beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)}$ en majorant cette fois-ci tous les coefficients de la colonne par $\beta_j^{(p)}$.
   La dernière inégalité demande un peu plus de soin : en reprenant la calcul précédent, on peut isoler dans la somme le terme correspondant à $\beta_j^{(p)}$, notons son indice de ligne l, pour écrire $(A^{p+1})_{ij} \geqslant \displaystyle\sum_{k \neq l} a_{ik}\alpha_j^{(p)} + a_{il}\beta_j^{(p)} \geqslant (1 - a_{il})\alpha_j^{(p)} + m\beta_j^{(p)}$ (puisque m est le plus petit de tous les éléments de la matrice A. Tout cela est supérieur à $\alpha_j^{(p)} - m\alpha_j^{(p)} + m\beta_j^{(p)} = \alpha_j^{(p)} + m\delta_j^{(p)}$, donc $\alpha_j^{(p+1)} \geqslant \alpha_j^{(p)} + m\delta_j^{(p)}$. Un calcul exactement symétrique donne $\beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)} - m\delta_j^{(p)}$. Il

ne reste plus qu'à soustraire les deux inagélités pour obtenir celle demandée.

3. Par une récurrence immédiate, on aura alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_j^{(n)} \leqslant (1-2m)^n \delta_j^{(0)} = (1-2m)^n$ (dans la matrice idéntité, la différence entre le plus grand et le plus petit coefficient d'une colonne vaut toujours 1. Comme $m > 0$ (la matrice ne contient que des termes strictement positifs par hypothèse), et comme $\delta_j^{(n)}$ est toujours positif par définition, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_j^{(n)} = 0$. On en déduit aisément que les suites $(\alpha_j^{(n)}$ et $\beta_j^{(n)}$ sont adjacentes : en effet, on a prouvé plus haut que l'une était croissante et l'autre décroissante, et on vient d'expliquer que leur limite tendait vers 0. Les deux suites sont donc convergentes vers une même limite l_j (qui dépend quand même de j). Mais si le plus grand et le plus petit coefficient de la colonne convergent vers une même limite, par théorème des gendarmes, tous les termes de la colonne, qui sont compris entre les deux, convergent également vers l_j. Ainsi, tous les coefficients de la suite de matrices (A^n) ont une limite, et la suite converge. Par ailleurs, on a prouvé que les limites étaient identiques pour tous les coefficients d'une même colonne, donc toutes les lignes de la matrice B sont identiques.

4. On sait que la suite (A^n) converge vers une matrice B dont toutes les lignes sont identiques. Mais il est évident dans ce cas que la suite $({}^tA^n)$ converge vers ${}^tB$ (on se contente de mettre les coefficients à un endroit différent dans la matrice, ça ne va sûrement pas changer les limites !). Comme les deux suites sont en fait identiques puisque $A =^t A$, on en déduit que $B =^t B$. La matrice B est donc une matrice symétrique dont toutes les lignes sont identiques, tous ses coefficients sont nécessairement égaux (puisque ses colonnes sont alors elles aussi identiques). Comme la somme des coefficients sur une lignes doit donner 1, chaque coefficient doit donc être égal à $\dfrac{1}{3}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.