Devoir à la Maison n°7

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le mercredi 20 mars

Problème

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dire **stochastique** si tous ses coefficients sont positifs et si, $\forall i \in \{1; \dots; n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. On considèrera dans ce problème qu'une suite de matrice $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ **converge** vers la matrice A si chacun des coefficients $(A_p)_{i,j}$ a pour limite $A_{i,j}$ quand n tend vers $+\infty$.

I. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère dans cette première partie la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $A^n = a_n A + b_n I$.
3. Déterminer des relations de récurrence sur les suites (a_n) et (b_n), et en déduire les valeurs de a_n et b_n.
4. Déterminer explicitement la matrice A^n.
5. Montrer que la suite de matrices (A^n) converge, et que sa limite est une matrice stochastique.

II. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans cette deuxième partie, on pose $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les puissances de la matrice J.
2. Écrire B comme combinaison des matrices I_3 et J, et en déduire les puissances de la matrice B à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. Montrer que la suite (B^n) converge, et que sa limite est une matrice stochastique.

III. Étude générale des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère désormais une matrice stochastique d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in [0,1]^2$.

1. Calculer A^p dans le cas où $a = b = 1$, et $a = b = 0$. On exclut ces deux cas particuliers pour les questions suivantes.
2. On considère le polynôme $P = (X-1)(X-a-b+1)$, calculer $P(A)$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
4. En déduire les puissances de la matrice A.
5. Montrer que la suite (A^p) converge vers une limite à préciser.

IV. Une étude plus générale.

On considère désormais une matrice stochastique (à n lignes et n colonnes) dont tous les coefficients sont strictement positifs. On note m le plus petit coefficient de A ; $\alpha_j^{(p)}$ le plus petit coefficient de la colonne numéro j de la matrice A^p, et $\beta_j^{(p)}$ le plus grand coefficient de cette même colonne. Enfin, on note $\delta_j^{(p)} = \beta_j^{(p)} - \alpha_j^{(p)}$.

1. Montrer que si la suite (A^p) converge, sa limite B est une matrice stochastique, et vérifie $B^2 = B$ et $BA = AB$.
2. Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1; \ldots ; n\}$, $\alpha_j^{(p)} \leqslant \alpha_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)}$, et $\delta_j^{(p+1)} \leqslant (1-2m)\delta_j^{(p)}$.
3. En déduire que la suite (A^p) converge. Que peut-on dire des lignes de la matrice limite B ?
4. Déterminer la limite de la suite (A^p) lorsque $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (on pourra exploiter le fait que A est une matrice symétrique).