Devoir à la Maison n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

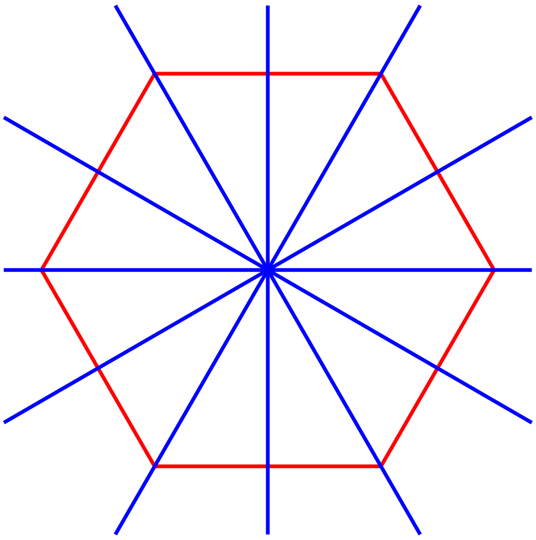
vendredi 8 février

Exercice 1

1. Montrons donc que G est un sous-groupe de l'ensemble de toutes les isométries du plan.
   - G contient certainement l'élément neutre de l'ensemble des isométries, qui est l'identité (en effet, si personne ne bouge, l'hexagone est laissé stable).
   - si f et g sont deux isométries laissant l'Hexagone stable, $g \circ f$ aussi. En effet, la composée de deux isométries est une isométrie, et en notant H l'hexagone, on peut écrire $g \circ f(H) = g(f(H)) = g(H) = H$.
   - si f est une isométrie laissant l'hexagone stable, sa réciproque f^{-1} est aussi une isométrie, et $f^{-1}(H) = H$, puisqu'une isométrie étant bijective, pour tout point A de l'hexagone, on peut certainement trouver un point B tel que $f(B) = A$, et $B \in H$ pour avoir $f(H) = H$.
2. Une rotation qui laisse stable l'hexagone doit nécessairement envoyer un sommet donné (notons-le A) sur un point de l'hexagone à même distance de O que A. Les seuls points convenables sont les six sommets de l'hexagone. Mais une fois choisie l'image du point A, l'angle de la rotation est fixé, et donc la rotation elle-même également. Il y a donc six rotations possibles, une pour chaque image possible pour le point A, ou si on préfère six angles, à savoir 0 (c'est l'identité), $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π (symétrie centrale de centre O), $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$. Ces six rotations forment un sous-groupe car l'identité en fait partie, que la composée de deux de ces rotations est certainement une rotation de centre O laissant stable l'hexagone (on additionne simplement les angles modulo 2π, et que la réciproque d'une telle rotation est aussi une rotation de centre O et d'angle opposé modulo 2π. Si on préfère, on peut dresser le tableau de groupe suivant, en notant r_i la rotation d'angle $\frac{i\pi}{3}$, pour i variant entre 0 et 5 :

$\circ$	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
r_1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0
r_2	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1
r_3	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2
r_4	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3
r_5	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4

3. Comme pour les rotations, une réflexion est en fait forcément déterminée par l'image d'un sommet A. En effet, une fois l'image de ce sommet choisie parmi les sommets de l'hexagone, son voisin dans le sens trigonométrique sur H doit être envoyé sur le voisin de son image dans le sens indirect (les réflexions sont des isométries indirectes) et son autre voisin sur l'autre voisin. Ces images suffisent à caractériser la réflexion. On fait sans peine la liste des six réflexions possibles : les trois réflexions dont les axes sont les grandes diagonales de l'hexagone (passant par deux sommets opposés), et les trois réflexions dont les axes sont les médiatrices du segment joignant deux sommets consécutifs de H (voir dessin ci-dessous pour les six droites). Ces six réflexions ne peuvent certainement pas former un sous-groupe puisque l'identité n'en fait pas partie !



4. Il suffit en fait de reprendre les raisonnements précédents. On prend un sommet A de l'hexagone, on a six choix pour son image (qui doit être un des sommets de H), et deux possibilités une fois cette image choisie : soit on garde ses voisins dans le même sens, et on aura une rotation, soit on inverse le sens et on aura une réflexion. On démontrerait de la même façon qu'un polygône régulier à n côtés a toujours $2n$ isométries, n rotations et n réflexions, qui forment un groupe appelé groupe diédral d'ordre n.

Exercice 2

I. Étude de quelques valeurs sympathiques de k.

1. (a) En effet, $u_0 \in]0;1[$ par hypothèse, et en supposant $u_n \in]0;1[$, on aura également $1 - u_n \in]0;1[$, donc $u_n(1-u_n) \in]0;1[$. Le facteur k étant supposé strictement inférieur à 1, on en déduit que $u_{n+1} \in]0;1[$, ce qui achève la récurrence.

   (b) Calculons donc $u_{n+1} - u_n = ku_n(1-u_n) - u_n = u_n(k-1-u_n)$. Puisque $k < 1$ et $u_n > 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$, et la suite est donc décroissante. Comme elle est décroissante et minorée, elle converge nécessairement. Sa limite l doit vérifier l'équation $l = kl(1-l)$ par passage à la limite de la relation de récurrence. Cette équation peut se factoriser sous la forme $l(1-k+kl) = 0$. Elle admet donc pour solutions $l = 0$ et $l = \dfrac{k-1}{k}$. Cette deuxième solution est, pour les valeurs de k qui nous concernent pour l'instant, strictement négative, et ne peut donc pas constituer une limite valide pour la suite (u_n) dont tous les termes sont positifs. La suite converge donc vers 0.

   (c) Puisque $0 < 1 - u_n < 1$, la relation de récurrence implique que $0 < u_{n+1} < ku_n$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant k^n a$. En effet,c'est vrai pour u_0 (c'est même alors une égalité), et si $u_n \leqslant k^n a$, alors $u_{n+1} < ku_n \leqslant k \times k^n a = k^{n+1}a$. On peut donc prendre pour (v_n) la suite géométrique de raison $k < 1$ et de premier terme a.

   (d) Posons $q' = \dfrac{1+k}{2}$, et $w_n = q'^n a$, la suite (w_n) est bien géométrique, de raison strictement inférieure à 1 puisque $k < 1$ (donc $k + 1 < 2$), et $u_n = o(w_n)$ car $v_n = o(w_n)$. En effet, $\dfrac{v_n}{w_n} = \left(\dfrac{k}{q'}\right)^n$ a pour limite 0 puisque $\dfrac{k}{q'} < 1$.

2. (a) On peut faire exactement le même raisonnement que dans la partie précédente : la suite est à valeurs dans $]0;1[$ (récurrence identique à celle de la première question), et décroissante

(calcul à nouveau identique), donc convergente. De plus, le seul point fixe quand $k = 1$ est 0 donc la limite est nécessairement nulle.

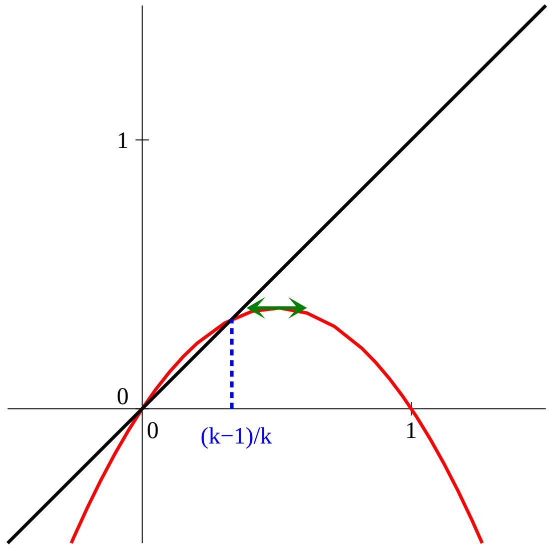
(b) Calculons $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n(1-u_n)} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \dfrac{1}{1-u_n}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} 1 - u_n = 1$, et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = 1$.

(c) Remarquons que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{u_k} - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k}\right) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{a}\right)$. D'après le théorème de Cesaro, cette expression a la même limite que celle calculée à la question précédente, autrement dit 1. Comme $\dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{1}{a}$ tend certainement vers 0, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)u_{n+1}} = 1$, donc $u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n+1}$, ou encore $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

3. (a) Aucune raison que ça ait changé depuis tout à l'heure, les limites possibles sont 0 et $\dfrac{k-1}{k}$.

(b) Supposons donc que (u_n) tende vers 0, on peut alors affirmer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \varepsilon$. On en déduit que $1 - \varepsilon < 1 - u_n < 1 + \varepsilon$, ce dont on déduit que $|u_{n+1}| = k|u_n||1 - u_n| > k(1-\varepsilon)|u_n|$. Choisissons une valeur de ε (qui sera désormais fixée) strictement inférieure à $1 - \dfrac{1}{k}$ (on peut puisque, k étant strictement supérieur à 1, cette quantité est bien strictement positive), alors $1 - \varepsilon > \dfrac{1}{k}$, donc $k(1-\varepsilon) > 1$. Dans ce cas, on aura, à partir du rang n_0, $|u_{n+1}| > |u_n|$. Autrement dit, la suite $(|u_n|)$ sera strictement croissante à partir du rang n_0, et ne peut alors tendre vers 0. Ah, si, c'est possible à condition que u_{n_0} lui-même soit égal à 0. Mais pour cela, on doit avoir u_{n_0-1} qui vérifie l'équation $ku_{n_0-1}(1 - u_{n_0-1}) = 0$, ce qui impliquerait que u_{n_0-1} soit lui-même égal à 0 ou 1, ce qui est impossible 1 n'a aucun antécédant par la fonction de récurrence, comme on va le voir juste après, et quitte à remplacer u_{n_0} par le premier terme nul de la suite, u_{n_0-1} ne peut pas être également nul). Conclusion : la suite ne peut pas tendre vers 0.

(c) Le plus simple est de revenir aux classiques des études de suites récurrentes, l'étude de la fonction $f_k : x \mapsto kx(1-x)$. Cette fonction est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_k'(x) = k - 2kx$, qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$. Elle admet donc un maximum de valeur $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{k}{4} < \dfrac{1}{2}$ Elle admet comme on l'a déjà vu deux points fixes : 0 et $\dfrac{k-1}{k} = 1 - \dfrac{1}{k}$, qui dans ce paragraphe se trouve toujours entre 0 et $\dfrac{1}{2}$, et le signe de $f(x) - x$ est positif uniquement entre 0 et $\dfrac{k-1}{k}$. On peut alors faire la représentation graphique suivante :



Il faut en fait distinguer deux cas. Commençons par le cas où $0 < a < \dfrac{k-1}{k}$ et prouvons par récurrence que tous les termes de la suite sont alors dans ce même intervalle $\left]0; \dfrac{k-1}{k}\right[$. C'est vrai par hypothèse pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, la croissance de f_k sur cet intervalle permet d'affirmer que $f(0) < f(u_n) < f\left(\dfrac{k-1}{k}\right)$, soit $0 < u_{n+1} < \dfrac{k-1}{k}$, exactement ce qu'on veut. Comme $f(x) - x > 0$ sur cet intervalle, on en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite est croissante. Puisqu'elle est majorée, elle converge, vers un des deux points fixes de f. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant a > 0$, donc la suite ne peut converger vers 0. Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{k-1}{k}$. Le cas où $\dfrac{k-1}{k} \leqslant a < \dfrac{1}{2}$ est identique. On prouve cette fois-ci que l'intervalle $\left[\dfrac{k-1}{k}; \dfrac{1}{2}\right[$ est stable par la fonction (il suffit d'utiliser le fait que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < \dfrac{1}{2}$), donc tous les termes de la suite sont dans cet intervalle, et la suite sera par conséquent décroissante. Elle converge alors nécessairement vers $\dfrac{k-1}{k}$.

(d) Dans le cas où $a > \dfrac{1}{2}$, le tableau de variations de f_k permet d'affirmer que $u_1 \in \left]0; \dfrac{1}{2}\right[$ (en effet, $f_k(1) = 0$). La suite extraite obtenue en oubliant simplement le terme u_0 vérifie alors exactement les conditions de la question précédente, ce qui suffit à prouver que (u_n) converge vers α. Par contre, elle peut n'être monotone qu'à partir du rang 1.

(e) On reconnait un taux d'accroissement : puisque (u_n) tend vers α et que la fonction f est certainement dérivable en α, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = f'(\alpha) = k - 2(k-1) = 2 - k$. Notons que $0 < 2 - k < 1$ avec les hypothèses faites sur k. Il existe donc certainement un réel q vérifiant $2 - k < q < 1$. À partir d'un certain rang n_0, la suite (v_n) convergeant vers $2 - k$, elle devra vérifier $|v_n| < q$. On prouve alors par une récurrence facile que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \alpha| < q^{n-n_0}|u_{n_0} - \alpha|$. La suite $(u_n - \alpha)$ est donc majorée par une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, et comme dans la question 1.d, on en déduit sans problème une seconde suite géométrique de raion strictement inférieure par rapport à laquelle u_n est négligeable.

(f) On sait déjà que u_n tend vers $\alpha = \dfrac{k-1}{k}$, reste à déterminer la limite du quotient de droite, qui est une belle forme indéterminée (numérateur et dénominateur tendent tous les deux vers 0). Pour alléger un tout petit peu les calculs, on va remplacer provisoirement les u_n par des x et calculer $\dfrac{(f(x)-x)^2}{f(f(x))-2f(x)+x}$, en remplaçant quand on le pourra les $k-1$ par des $k\alpha$. Le numérateur vaut donc $(kx(1-x)-x)^2 = ((k-1)x-kx^2)^2 = (k\alpha x - kx^2)^2 = k^2x^2(\alpha-x)^2 = k^2x^2(x-\alpha)^2$. Passons au cas plus désagréable du dénominateur : $f(kx(1-x)) - 2kx(1-x)+x = k^2x(1-x)(1-kx+kx^2) - 2kx(1-x)+x = k^2x(1-(k+1)x+2kx^2-kx^3) - 2kx(1-x)+x = x(k^2-k^2(k+1)x+2k^3x^2-k^3x^3 - 2k+2kx+1) = x((k-1)^2+(2k-k^2-k^3)x+2k^3x^2-k^3x^3) = x(k^2\alpha^2+k(k+2)(1-k)x+2k^3x^2-k^3x^3 = k^2x(\alpha^2-(k+2)\alpha x+2kx^2-kx^3)$. Comme $\alpha = 1-\dfrac{1}{k}$, on a $k = \dfrac{1}{1-\alpha}$, et $k+1 = \dfrac{1+2(1-\alpha)}{1-\alpha}$, donc le dénominateur peut s'écrire sous la forme $k^3x(\alpha^2(1-\alpha)-(3-2\alpha)\alpha x+2x^2-x^3) = k^3x(\alpha^2-\alpha^3+(2\alpha^2-3\alpha)x+2x^2-x^3)$. La parenthèse de degré 3 devrait s'annuler lorsque $x=\alpha$, en effet ça donne $\alpha^2-\alpha^3+2\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha^2-\alpha^3 = 0$. On peut donc factoriser cette parenthèse sous la forme $(x-\alpha)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-\alpha a)x^2+(c-\alpha b)x-\alpha c$. Par identification des coefficients, $a=-1$; $b-\alpha a = 2$ donc $b = 2-\alpha$ et $c = \alpha^2-\alpha$. On en déduit pour le dénominateur la forme $k^3x(x-\alpha)(-x^2+(2-\alpha)x+\alpha^2-\alpha)$, avec une dernière parenthèse qui ne s'annule plus en α. Finalement, en revenant au calcul initial, $\dfrac{(f(x)-x)^2}{f(f(x))-2f(x)+x} = \dfrac{k^2x^2(x-\alpha)^2}{k^3x(x-\alpha)(-x^2+(2-\alpha)x+\alpha^2-\alpha)} = \dfrac{x(x-\alpha)}{k(-x^2+(2-\alpha)x+\alpha^2-\alpha)} = \dfrac{(\alpha-1)x(x-\alpha)}{x^2+(\alpha-2)x+\alpha-\alpha^2}$. Si on préfère, $\dfrac{(u_{n+1}-u_n)^2}{u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n} = \dfrac{(\alpha-1)u_n}{u_n^2+(\alpha-2)u_n+\alpha-\alpha^2}(u_n-\alpha)$. Quand n tend vers $+\infty$, le quotient devant $u_n-\alpha$ a pour limite $\dfrac{(\alpha-1)\alpha}{\alpha^2+\alpha^2-2\alpha+\alpha-\alpha^2} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2-\alpha} = 1$. Autrement dit, notre expression est globalement équivalente à $u_n-\alpha$ (et en particulier tend vers 0), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

De plus, $t_n - \alpha = u_n - \alpha - \dfrac{(\alpha-1)u_n}{u_n^2+(\alpha-2)u_n+\alpha^2-\alpha}(u_n-\alpha)$
$= \left(1 - \dfrac{(\alpha-1)u_n}{u_n^2+(\alpha-2)u_n+\alpha^2-\alpha}\right)(u_n-\alpha)$. Le calcul effectué ci-dessus prouve que la parenthèse a pour limite $1-1=0$, ce qui signifie bien que $t_n-\alpha = o(u_n-\alpha)$.

II. Un cas nettement plus rigolo.

1. Calculons donc $f(\sin^2(\theta)) = 4\sin^2(\theta)(1-\sin^2(\theta)) = 4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = (2\sin(\theta)\cos(\theta))^2 = \sin^2(2\theta)$.
2. D'après la question précédente, on aura dans le premier cas $u_1 = \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, puis $u_2 = \sin^2\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$. Mais comme $\dfrac{4\pi}{5} = \pi - \dfrac{\pi}{5}$, $u_2 = a$, et la suite sera donc 2-périodique (pour une suite récurrente, dès qu'un terme est identique à un terme précédemment obtenu, la suite est récurrente, puisque la relation reste la même). De même, en partant de $a = \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, on aura $u_1 = \sin^2\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ puis $u_2 = \sin^2\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) = a$ (car cette fois $\dfrac{8\pi}{5} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{5}$, les sinus sont opposés mais leurs carrés sont bien égaux), la suite est également 2-périodique.
3. La suite sera périodique de période 2 si $u_2 = a$. Or, $u_1 = 4a(1-a)$ et $u_2 = 4u_1(1-u_1) = 4(4a(1-a))(1-4a(1-a)) = 16a(1-a)(1-4a+4a^2)$. Cette quantité est égale à a si $a=0$ (mais dans ce cas la suite est périodique de période 1 puisque constante égale à 0) ou si $16(1-a)(1-4a+4a^2) = 1$, soit $16(1-5a+8a^2-4a^3) = 1$, donc $64a^3-128a^2+80a-15 = 0$. Bon, seul souci, résoudre cette équation est essentiellement impossible. En fait, on peut s'en sortir en affirmant que $\dfrac{3}{4}$, qui est un point fixe de la fonction f (cf ci-dessous), est nécessairement

une racine de l'équation (puisque, si $a = \frac{3}{4}$, la suite est constante, et en particulier $u_2 = a$). Les deux valeurs $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ sont également des racines d'après les calculs précedntes, et ces racines sont différentes de $\frac{3}{4}$, ce qui fait déjà trois racines distinctes. Comme le polynôme est de degré 3, il ne peut pas avoir d'autres racines, et les seules valeurs pour lesquelles la suite est 2-périodique (sans être constante) sont les deux obtenues à la question précédente.
Autre méthode : puisque $a \in]0;1[$, on peut écrire $a = \sin^2(\theta)$ pour un certain angle θ. Dans ce cas, les calculs de la première question donnent $u_2 = \sin^2(4\theta)$. On a donc $a = u_2$ si $\sin^2(\theta) = \sin^2(4\theta)$, ce qui ne peut se produire que si $4\theta \equiv \theta[\pi]$ ou $4\theta \equiv \pi - \theta[\pi]$. La deuxième équation donne les valeurs $\theta = \frac{\pi}{5}$ et $\theta = \frac{2\pi}{5}$, la première donne $\theta = \frac{\pi}{3}$ (les autres possibilités ont un même carré du sinus). Or, on vérifie à la main que cet angle ne convient pas, on aurait alors $a = \frac{1}{4}$, donc $u_1 = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, puis $u_2 = 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. La suite est alors stationnaire mais pas 2-périodique.

4. Ce sont encore et toujours les mêmes, à savoir 0 et $\frac{k-1}{k} = \frac{3}{4}$.
5. L'énoncé est en fait imprécis : la suite n'est jamais convergente sauf si elle est stationnaire (on vient de voir qu'en partant de $a = \frac{1}{4}$, la suite convergerait certainement vers $\frac{3}{4}$). Pour le fait que la suite ne peut pas tendre vers 0, c'est exactement le même raisonnement qu'au I.3.c (le fait que k soit plus gros rend même le raisonnement plus facile). Pour $\frac{3}{4}$, on peut en fait s'en sortir de la même façon. Supposons que la suite converge vers $\frac{3}{4}$ sans stationner, donc sans jamais atteindre la valeur $\frac{3}{4}$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel, par exemple, $0,7 < u_n < 0,8$. Or, $u_{n+1} - \frac{3}{4} = 4u_n(1-u_n) - \frac{3}{4} = -4u_n^2 + 4u_n - \frac{3}{4}$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet pour racines $x_1 = \frac{-4-2}{-8} = \frac{3}{4}$ et $x_2 = \frac{-4+2}{-8} = \frac{1}{4}$. Autrement dit, $u_{n+1} - \frac{3}{4} = -4\left(u_n - \frac{1}{4}\right)\left(u_n - \frac{3}{4}\right) = (-4u_n + 1)\left(u_n - \frac{3}{4}\right)$. Mais pour les valeurs de n choisies, $-2.2 < -4u_n + 1 < -1.8$, donc on aura $\left|u_{n+1} - \frac{3}{4}\right| > 1.8\left|u_n - \frac{3}{4}\right|$. En particulier, la distance de u_n à $\frac{3}{4}$ est une suite strictement croissante, ce qui empêche (u_n) de converger vers $\frac{3}{4}$ (sauf suite stationnaire).

III. De plus en plus rigolo.

1. Étudions les variations de f sur I : $f'(x) = 6 - 12x$ s'annule toujours en $\frac{1}{2}$. La fonction est donc croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Elle admet pour maximum $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Pour determiner les réels dont l'image n'est pas dans I, il faut déterminer les antécédents de 1 : l'équation $f(x) = 1$ revient à $6x^2 - 6x + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 24 = 12$, et a donc pour racines $x_1 = \frac{6 - \sqrt{12}}{12} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$, et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$. On en déduit, au vu des variations de la fonction f, que $I_1 = [x_1, x_2]$.
2. On peut prouver cette propriété par récurrence. C'est vrai pour I_1 qu'on vient de calculer explicitement. Supposons maintenant I_n non vide, il contient donc un réel (au moins) $x \in]0;1[$. Mais alors l'équation $f(x) = x$ admet certainement des solutions dans $]0;1[$ (puisque f est surjective de $]0;1[$ vers $\left]0; \frac{3}{2}\right[$ d'après son tableau de variations), donc x admet des antécédents

par f dans I. Ces antécédents sont des éléments de I_{n+1}, qui n'est donc pas vide.

3. L'ensemble P contient par exemple le point fixe $\frac{5}{6}$, qui vérifie, pour tout entier n, $f^n(x) = \frac{5}{6} \in I$. En fait, P contient une infinité de réels, mais c'est plus dur à prouver.
4. Si $a \in P$ (et pas x comme écrit par erreur dans l'énoncé), on a par définition de P, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < f^n(a) < 1$, soit $0 < u_n < a$. La suite est donc bien bornée. Par contre, si $a \in I$, il existe un entier n pour lequel $u_n \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$. Da'près le tableau de variations de la fonction f, on a alors $u_{n+1} < 0$. À partir de ce rang, l'intervalle $]-\infty; 0[$ étant stable, tous les termes de la suite seront strictement négatifs (à ce stade du problème, on s'épargnera la récurrence triviale). Comme $f(x) - x < 0$ sur $]-\infty; 0[$, la suite est alors décroissante à partir d'un certain rang. Si elle était minorée, elle convergerait vers un des points fixes de f, donc vers 0 ou $\frac{5}{6}$, ce qui est difficile pour une suite de réels strictement négatifs qui décroît. La suite ne peut donc converger, étant décroissante, elle diverge vers $-\infty$.
5. En fait, l'ensemble des valeurs pour lesquelles la suite diverge est dense dans I, alors qu'au contraire l'ensemble P est constitué de valeurs isolées dans I. Théoriquement, si on donne à la machine une valeur initiale dans P, elle devrait garder des termes bornés pour la suite. Mais en pratique, les erreurs d'arrondis et approximations successives de la machine font qu'elle va toujours finir par calculer un terme de la suite qui va glisser de P vers une valeur pour laquelle la suite s'envole (négativement, puisque vers $-\infty$).