# Devoir à la Maison n°6

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le vendredi 8 février

## Exercice 1

On considère un hexagone régulier dans le plan, et on note $G$ l'ensemble des isométries de cet hexagone (c'est-à-dire l'ensemble des isométries du plan laissant globalement stable l'hexagone ; si vous préférez, chacun des sommets de l'hexagone doit être envoyé par l'isométrie sur un sommet de l'hexagone, lui-même ou un autre sommet).

1. Montrer que $(G, o)$ est un groupe (on pourra admettre que l'ensemble de toutes les isométries du plan est un groupe, et montrer que $G$ en est un sous-groupe).
2. Montrer que, si on note $O$ le centre de l'hexagone, il existe six rotations de centre $O$ (en comptant l'identité) qui sont des isométries de l'hexagone. Montrer que ces six rotations forment un sous-groupe de $G$.
3. Montrer qu'il existe également six réflexions appartenant à $G$, mais que celles-ci ne forment pas un sous-groupe de $G$.
4. Prouver que $G$ est uniquement constitué des 12 éléments précisés dans les questions précédentes.

## Exercice 2

Dans tout ce problème, on s'intéresse à des suites $(u_n)$ vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$, où $k$ sera un réel fixé pouvant varier d'une question à l'autre. Par ailleurs, on pose $u_0 = a$, avec $a \in ]0; 1[$ (cette condition restant vérifiée tout au long du problème). On notera d'ailleurs $I = ]0; 1[$.

### I. Étude de quelques valeurs sympathiques de $k$.

1. Dans cette première question, on suppose que $k \in ]0; 1[$.
   (a) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]0; 1[$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)$, et en déduire sa limite.
   (c) Montrer qu'il existe une suite géométrique $(v_n)$ de raison $q < 1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
   (d) Montrer qu'il existe une autre suite géométrique $(w_n)$ de raison $q' < 1$ telle que $u_n = o(w_n)$.
2. Dans cette deuxième question, on considère le cas particulier $k = 1$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
   (b) Montrer que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ admet une limite (à préciser, bien entendu).
   (c) En appliquant le théorème de Cesaro (ex. 13 de la feuille n°9), montrer que $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_0}\right)$ possède une limite finie, et en déduire un équivalent simple de $u_n$.

3. Dans cette troisième question, on suppose $k \in ]1;2[$.
   (a) Déterminer les limires possibles de la suite $(u_n)$.
   (b) Montrer en revenant à la définition de la limite et en effectuant un raisonnement par l'absurde que la suite $(u_n)$ ne peut pas tendre vers 0 (question difficile).
   (c) Montrer que, si $0 < a < \frac{1}{2}$, la suite est monotone et déterminer sa limite, que l'on notera désormais $\alpha$.
   (d) Que se passe-t-il si $a > \frac{1}{2}$ ? Et si $a = \frac{1}{2}$ ?
   (e) On pose $v_n = \dfrac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha}$, où $f : x \mapsto kx(1-x)$. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$, et trouver une suite simple devant laquelle $u_n - \alpha$ est négligeable.
   (f) On pose désormais $t_n = u_n - \dfrac{(u_{n+1} - u_n)^2}{u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n}$. Déterminer la limite de la suite $(t_n)$, et montrer que $t_n - \alpha = o(u_n - \alpha)$.

## II. Un cas nettement plus rigolo.

On suppose dans toute cette partie que $k = 4$.

1. Pour tout réel $\theta$, exprimer $f(\sin^2(\theta))$ en fonction de $\sin(2\theta)$.
2. Montrer que, si $a = \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ou $a = \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, la suite $(u_n)$ est périodique, et préciser sa période.
3. Déterminer toutes les valeurs de $a$ pour lesquelles la suite est périodique de période 2.
4. Déterminer les valeurs possibles pour la limite de la suite $(u_n)$.
5. Montrer que la suite $(u_n)$ n'est jamais convergente (difficile).

## III. De plus en plus rigolo.

On suppose dans toute cette partie que $k = 6$, et on pose $f : x \mapsto 6x(1-x)$.

1. Déterminer l'ensemble $I_1 = \{x \in I \mid f(x) \notin I\}$.
2. On note de même, pour tout entier $n$, $I_n = \{x \in I \mid f^{n-1}(x) \in I \text{ mais } f^n(x) \notin I\}$ (ou si vous préférez $f^{n-1}(x) \in I_1$). Montrer que $I_n$ n'est jamais vide.
3. On note $P = \{x \in I \mid \forall n \in \mathbb{N}, f^n(x) \in I\}$. Montrer que $P$ n'est pas vide.
4. Montrer que, si $x \in P$, la suite $(u_n)$ est bornée, mais si $x \in I_n$ (peu importe la valeur de $n$), la suite tend vers $-\infty$.
5. On tente de faire calculer les termes successifs de la suite à une machine peu performante. On constate que, quelle que soit la valeur initiale donnée, la suite semble tendre vers $-\infty$. Comment expliquer celà ?