Devoir à la Maison n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 janvier 2013

Exercice 1

1. La relation est symétrique : $(n,p)R(n,p)$ pusique $n+p = n+p$ et $n \leqslant n$ (deuxième condition de validation de la relation R. Elle est antisymétrique : supposons qu'on ait à la fois $(n,p)R(n',p')$ et $(n',p')R(n,p)$. On ne peut pas avoir $n+p < n'+p'$, sinon la condition $(n',p')R(n,p)$ est impossible à réaliser. De même $n'+p' < n+p$ est impossible. On a donc $n+p = n'+p'$ et le fait que la relation soit vérifiée dans les deux sens impose que $n \leqslant n'$ et $n' \leqslant n$. Autrement dit, $n = n'$, ce dont on déduit que $p = p'$ pour avoir $n+p = n'+p'$. Finalement, les deux couples sont bien égaux. Enfin, la relation est transitive : supposons que $(n,p)R(n',p')$ et $(n',p')R(n'',p'')$. Si on a $n+p < n'+p'$ ou $n'+p' < n''+p''$, on aura $n+p < n''+p''$, donc $(n,p)R(n'',p'')$. Dans le cas contraire, c'est que $n+p = n'+p' = n''+p''$, et on doit avoir $n \leqslant n' \leqslant n''$, ce qui implique $n \leqslant n''$, et la relation $(n,p)R(n'',p'')$ est toujours vérifiée.

   Pour prouver que l'ordre est total, considérons deux couples d'entiers (n,p) et (n',p'). Si $n+p \neq n'+p'$, on a soit $n+p < n'+p'$, et donc $(n,p)R(n',p')$, soit $n+p > n'+p'$ ce qui implique $(n',p')R(n,p)$. Si $n+p = n'+p'$, on aura de façon similaire soit $n \leqslant n'$, et $(n,p)R(n',p')$, soit $n \leqslant n'$, et $(n',p')R(n,p)$. Dans tous les cas, on arrive à comparer les couples (n,p) et (n',p').

2. Pour qu'un couple (n,p) soit « compris entre » $(2,3)$ et $(1,5)$, il faut qu'il vérifie $n+p = 5$ ou $n+p = 6$. Si $n+p = 5$, on doit avoir $n \geqslant 2$ pour que le couple soit plus grand que $(2,3)$. Si $n+p = 6$, on doit cette fois avoir $n \leqslant 1$. Cela laisse comme possibilité les couples $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$, $(5,0)$, $(0,6)$ et $(1,5)$. Si on veut des « inégalités » strictes, il y a donc quatre couples possibiles.

3. Il y a tous les couples (n',p') pour lesquels $n'+p' < n+p$, et tous ceux pour lesquels $n'+p' = n+p$, et $n' \leqslant n$. Les couples vérifiant $n'+p' = k$, pour un entier k fixé, sont au nombre de $k+1$ (en effet, on peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et k pour n, et on doit ensuite imposer $p = k-n$), ce qui donne un nombre de couples vérifiant $n'+p' < n+p$ égal à $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+p-1} k+1 = \sum_{k=1}^{n+p} k = \frac{(n+p)(n+p+1)}{2}$. On y ajoute les $n+1$ couples de la forme $(i, n+p-i)$, pour $0 \leqslant i \leqslant n$ (ce sont les couples dont la somme des coordonnées vaut $n+p$) pour obtenir un total de $\dfrac{(n+p)(n+p+1)}{2} + n + 1$ couples inférieurs (ou égaux) à (n,p).

Exercice 2

1. Partons donc de la forme finale : $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2} + \dfrac{c}{k+4} = \dfrac{a(k+2)(k+4) + bk(k+4) + ck(k+2)}{k(k+2)(k+4)} = \dfrac{a(k^2+6k+8) + b(k^2+4k) + c(k^2+2k)}{k(k+2)(k+4)} = \dfrac{(a+b+c)k^2 + (6a+4b+2c)k + 8a}{k(k+2)(k+4)}$. Pour que l'identification fonctionne, on doit donc avoir $a+b+c = 0$, $6a+4b+2c = 0$ et $8a = 1$, soit $a = \dfrac{1}{8}$, $b+c = -\dfrac{1}{8}$ et $4b+2c = -\dfrac{3}{4}$. On peut procéder par substitution : $c = -\dfrac{1}{8} - b$, donc

$4b - \dfrac{1}{4} - 2b = -\dfrac{3}{4}$, soit $2b = -\dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$. Reste $c = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$. Conclusion de ce superbe calcul : $\dfrac{1}{k(k+2)(k+4)} = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{k+2} + \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{k+4}$.

2. Il se produit un magnifique télescopage, qu'on peut par exemple rédiger avec des changements d'indices :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} \\
&= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{8} \times \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{4} \times \frac{1}{k+2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{8} \times \frac{1}{k+4} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{k=n+2} \frac{1}{k} + \frac{1}{8} \sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\
&\quad -\frac{1}{8} \left(\sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{32} - \frac{1}{12} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4(n+2)} \\
&\quad + \frac{1}{8(n+1)} + \frac{1}{8(n+2)} + \frac{1}{8(n+3)} + \frac{1}{8(n+4)} \\
&= \frac{12+4+3-8}{96} + \\
&\quad \frac{-(n+2)(n+3)(n+4) - (n+1)(n+3)(n+4) + (n+1)(n+2)(n+4) + (n+1)(n+2)(n+3)}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11}{96} + \\
&\quad \frac{-(n^3+9n^2+26n+24) - (n^3+8n^2+19n+12) + (n^3+7n^2+14n+8) + (n^3+6n^2+11n+6)}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{4n^2+20n+22}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}
\end{aligned}$$

3. Essayons donc de prouver par récurrence la propriété $P_n : \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{11}{96} - \frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.
Pour $n = 1$, la somme se réduit à $\dfrac{1}{1 \times 3 \times 5} = \dfrac{1}{15}$, et la formule donne comme valeur $\dfrac{11}{96} - \dfrac{2+10+11}{4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \dfrac{11}{96} - \dfrac{23}{480} = \dfrac{55}{480} - \dfrac{23}{480} = \dfrac{32}{480} = \dfrac{1}{15}$, donc la propriété P_1 est vérifiée.
Supposons désormais la propriété vérifiée au rang n, on peut alors écrire

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{(2n^2+10n+11)(n+5) - 4(n+2)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^3+10n^2+11n+10n^2+50n+55-4n^2-24n-32}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^3+16n^2+37n+23}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}
\end{aligned}
$$

On constate que -1 est racine évidente du numérateur de la deuxième fraction, on peut donc écrire $2n^3+16n^2+37n+23 = (n+1)(an^2+bn+c) = an^3+(a+b)n^2+(b+c)n+c$. Par identification, on obtient $a=2$, $b=14$ et $c=23$. On peut donc écrire, en reprenant le calcul précédant, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{11}{96} - \frac{2n^2+14n+23}{4(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$. Le dénominateur de la deuxième fraction est bien celui donné par la formule de P_{n+1}, reste à vérifier que le numérateur est le bon, il devrait être égal à $2(n+1)^2+10(n+1)+11 = 2(n^2+2n+1)+10n+10+11 = 2n^2+14n+23$, c'est exactement ce qu'on a obtenu. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée et, par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier n.

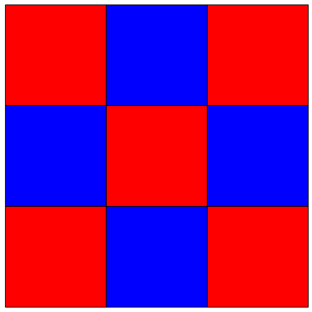
Remarque finale : les plus malins (ou les moins masochistes ?) d'entre vous auront évidemment laissé la formule sous la forme $\dfrac{11}{96} - \dfrac{1}{8(n+1)} - \dfrac{1}{8(n+2)} + \dfrac{1}{8(n+3)} + \dfrac{1}{8(n+4)}$, pour laquelle l'hérédité de la récurrence est très rapide à démontrer en utilisant le calcul de la première question.

Exercice 3

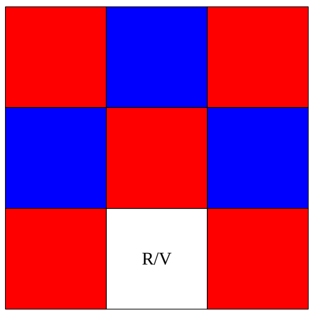
Commençons par remarquer que le nombre total de coloriages possibles est de 3^9 (trois couleurs possibles pour chacune des neuf cases), soit 19 683.

1. Il reste cinq cases à colorier comme on le souhaite, soit $3^5 = 243$ coloriages possibles.
2. On a donc trois choix de couleur possible pour chacune des lignes, soit $3^3 = 27$ possibilités.
3. Pour chaque ligne, il faut choisir dans quel ordre apparaissent les trois couleurs, ce qui laisse $3! = 6$ possibilités. Au total on aura donc $6^3 = 216$ coloriages possibles.
4. Il n'y a plus que deux couleurs disponibles, soit $2^9 = 512$ coloriages possibles.
5. On choisit l'emplacement des trois cases vertes parmi les neuf cases disponibles, soit $\dbinom{9}{3} = 84$ possibilités. Ensuite, il faut choisir trois cases rouges parmi les six restantes : $\dbinom{6}{3} = 20$ possibilités, et il n'y a plus le choix, les trois dernières cases doivent être bleues. il y a donc 1 680 coloriages possibles.
6. Il y a donc soit sept cases bleues, soit huit, soit neuf. Un seul coloriage contient neuf cases bleues. S'il y en a huit, on choisit la case qui n'est pas bleue (neuf possibilités) et on a deux couleurs pour la colorier, soit 18 coloriages. Enfin, s'il y a sept cases bleueues, on a $\dbinom{9}{2} = 36$ choix pour les deux cases non bleues, et 2^2 possibilités pour les colorier, soit 144 coloriages. Au total, cela fait 163 possibilités.

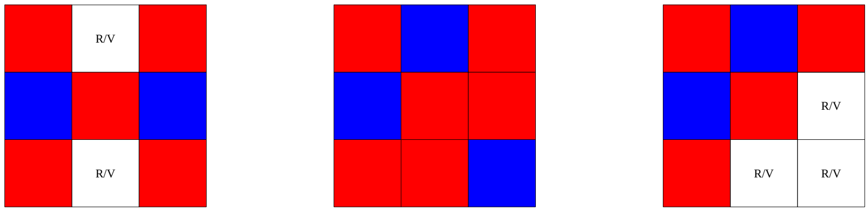
7. Pour cette condition, on peut colorier indépendamment chacune des trois colonnes de la grille. Si on met une case bleue en haut de colonne, il faut une verte en-dessous, et n'importe quoi en bas, trois possibilités. Si on met une verte ou une rouge en haut, on peut soit mettre une bleue puis une verte en dessous, soit une rouge ou verte puis n'importe quoi, donc $1+2\times 3=7$ possibilités. Pour une colonne, cela fait $3+2\times 7=17$ choix. Comme il y a trois colonnes, on trouve au total $17^3 = 4\ 913$ coloriages.
8. Donnons le nom de bords aux quatre cases de la grille qui ne sont pas situées dans les coins ni au centre, et essayons de distinguer les cas selon le nombre de bords bleus.
   - si les quatre bords sont bleus, toutes les autres cases doivent être rouges, un seul choix possible.



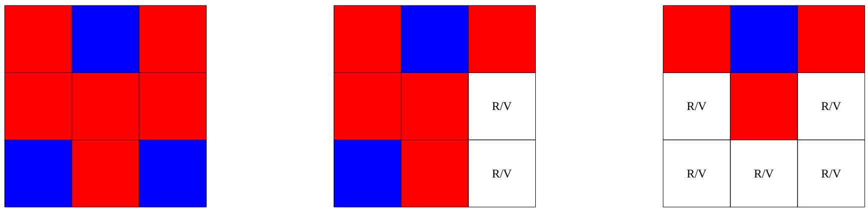
   - si trois bords sont bleus, cela impose aux quatre coins et au centre d'être rouges, mais le quatrième bord peut être choisi rouge ou vert (pas bleu, sinon on a quatre bords bleus, cas déjà compté ci-dessus). Il y a quatre choix pour décider quel bord n'est pas bleu, puis deux pour sa couleur, huit possibilités.



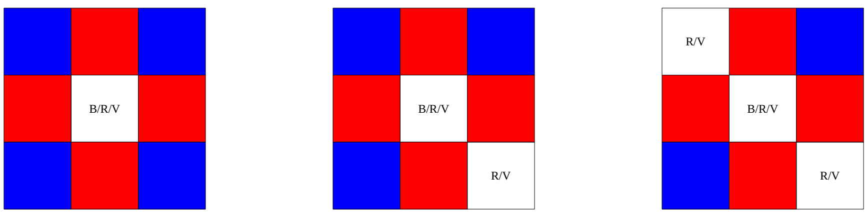
   - si deux bords opposés sont bleus (soit haut et bas, soit gauche et droite), les quatre coins et le centre doivent être rouges, et on fait ce qu'on veut (vert ou rouge) de chacun des deux bords restants, soit $2\times 2^2 = 8$ cas. Si deux bords consécutifs sont bleus, on a trois coins et le centre qui sont forcément rouges. Il reste une possibilité de mettre le dernier coin bleu (et les deux bords restants automatiquement rouges), ou de choisir du rouge/vert aléatoirement pour les trois cases restantes. Il y a quatre possibilités de choix pour les deux bords consécutifs, puis $1+2^3=9$ possibilités ensuite, soit 36 cas. Au total, on a donc 44 coloriages avec deux bords bleus.



- supposons un seul bord bleu, cela impose deux coins et le centre rouge. On a alors une possibilité de mettre les deux coins restants bleus (les autres cases seront rouges ; on peut choisir un des deux coins et le mettre bleu, ce qui impose deux bords rouges, et il reste un coin et un bord qu'on colorie en vert ou rouge, $2 \times 2^2 = 8$ coloriages ; ou bien on ne met aucun coin bleu, et on a pas moins de cinq cases avec lesquels on fait ce qu'on veut (sans mettre de bleu), $2^5 = 32$ possibilités. Comme il faut au départ choisir quel bord est bleu, cela donne $4 \times (1 + 8 + 32) = 164$ coloriages avec un bord bleu.



- Enfin, restent les cas sans bord bleu. Si on met les quatre coins bleus, on aura quatre bords rouges et un centre bleu/rouge/vert, trois cas. Si on met trois coins bleus (quatre choix de coin non bleu), on a les quatre bords rouges, un coin rouge/vert et le centre bleu/rouge/vert, $4 \times 2 \times 3 = 24$ cas ; si on met deux coins opposés bleus (deux possibilités), les quatre bords sont rouges et il reste deux bords rouge/vert et le centre bleu/rouge/vert, $2 \times 2^2 \times 3 = 24$ cas ; si on met deux coins consécutifs bleus (quatre possibilités), on a trois bords rouges et quatre cases rouge/vert (en oubliant le cas du centre bleu), $4 \times 2^4 = 64$ cas, auquels on ajoute le cas du centre bleu avec deux coins bleus, et donc quatre bords rouges et deux cases rouge/vert, soit $4 \times 2^2 = 16$ cas ; si on met un seul coin bleu sans le centre bleu, on a six cases rouge/vert et $4 \times 2^6 = 256$ cas ; un coin et le centre bleus, il reste trois coins rouge/vert et $4 \times 2^3 = 32$ cas. Enfin, si on ne met aucun coin bleu, soit le centre est bleu et on a le choix du rouge/vert pour les quatre coins ($2^4 = 16$ cas), soit rien n'est bleu et on a $2^9 = 512$ cas de coloriages uniquement rouge/vert. Ajoutons tout ça : $3 + 24 + 24 + 80 + 288 + 528 = 947$ cas.



etc...

- Conclusion (enfin !), on trouve $1 + 8 + 44 + 164 + 947 = 1\ 164$ coloriages convenables.