

# Devoir à la Maison n°5

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le vendredi 18 janvier

## Exercice 1

On considère sur  $\mathbb{N}^2$  la relation suivante :  $(n, p)R(n', p')$  si  $n + p < n' + p'$ , ou bien  $n + p = n' + p'$  et  $n \leq n'$ .

1. Montrer que  $R$  est une relation d'ordre totale sur  $\mathbb{N}^2$ .
2. Déterminer un couple d'entiers qui soit, au sens de cette relation  $R$ , inférieur à  $(1, 5)$  et supérieur à  $(2, 3)$ . Combien y a-t-il de tels couples ?
3. Combien y a-t-il de couples d'entiers inférieurs à un couple  $(n, p)$  donné ?

## Exercice 2

On cherche à calculer la somme suivante :  $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)}$

1. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} + \frac{c}{k+4}$ .
2. En déduire la somme recherchée à l'aide d'un télescopage.
3. Effectuer une nouvelle démonstration de la formule obtenue, par récurrence cette fois-ci.

## Exercice 3

On considère une grille de morpion (trois lignes, trois colonnes) dont on veut colorier chacune des cases en bleu, en vert ou en rouge (aucune case ne doit rester blanche). Combien y a-t-il de coloriages possibles respectant chacune des conditions suivantes :

1. Les quatre coins de la grille sont bleus.
2. Chaque ligne contient trois cases de la même couleur.
3. Chaque ligne contient trois cases de couleurs différentes.
4. Aucune case de la grille n'est rouge.
5. La grille contient trois cases vertes, trois rouges et trois bleues.
6. Il y a au moins sept cases bleues dans la grille.
7. Si une case bleue n'est pas sur la dernière ligne, il y a nécessairement une case verte en dessous.
8. Chaque case bleue ne contient que des cases rouges comme voisines.

JOYEUX NOËL ET BONNE ANNÉE !