Devoir à la Maison n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

7 décembre 2012

Exercice

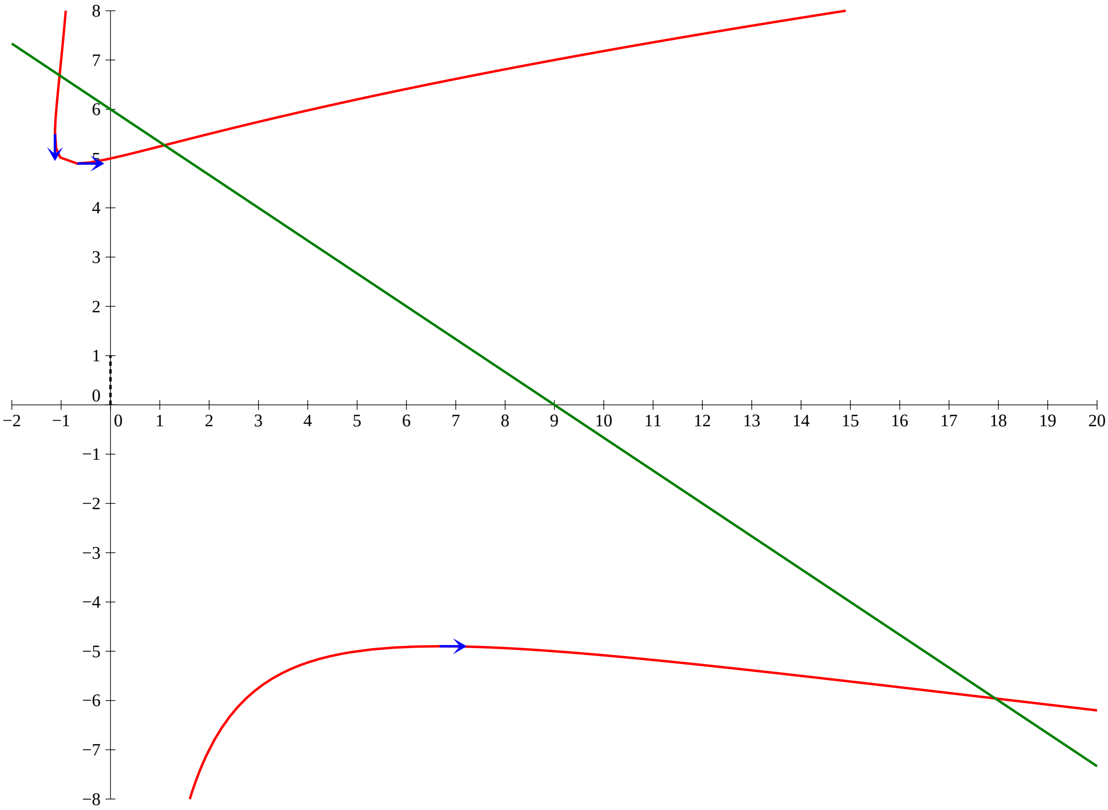
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Les deux fonctions coordonnées sont dérivables sur leur ensemble de définition, de dérivées $x'(t) = 4t - 3$ (qui s'annulera uniquement pour $t = \dfrac{3}{4}$), et $y'(t) = 2 - \dfrac{3}{t^2} = \dfrac{2t^2 - 3}{t^2}$, qui s'annule lorsque $t^2 = \dfrac{3}{2}$, soit $t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. On calcule $x\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2 \times \dfrac{9}{16} - \dfrac{9}{4} = -\dfrac{9}{8}$; $y\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{2} + 4 = \dfrac{11}{2}$; $x(0) = 0$; $x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = 2 \times 32 - 3\sqrt{\dfrac{3}{2}} = 3\left(1 - \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \simeq -0.67$; $y\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = 2\sqrt{\dfrac{3}{2}} + 3\sqrt{\dfrac{2}{3}} = 2\sqrt{6} \simeq 4.9$; $x\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = 3\left(1 + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \simeq 6.7$; $y\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = -2\sqrt{6}$. Voila le tableau de variations correspondant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\frac{3}{4}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	-3	$-$	0	$+$		$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	6.7	$\searrow$	$0 \mid 0$	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	-0.67	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{6}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Outre l'asymptote verticale en 0 (qui est simplement l'axe des ordonnées), on peut étudier les branches infinies en $\pm\infty$, où les deux fonctions coordonnées ont des limites infinies. On calcule sans difficulté $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, il y a donc une branche parabolique de direction (Ox) des deux côtés.

Reste le calcul des points d'inflexion : $x''(t) = 4$ et $y''(t) = \dfrac{6}{t^3}$, donc $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \dfrac{6(4t-3)}{t^3} - \dfrac{4(2t^2-3)}{t^2} = \dfrac{-8t^3 + 36t - 18}{t^3}$. On ne sait pas trouver les racines du numérateur, mais il en possède au maximum trois. Comme par ailleurs $\lim\limits_{t \to -\infty} -8t^3 + 36t - 18 = +\infty$; $-8 \times 0^3 + 36 \times 0 - 18 < 0$; $-8 \times 1^3 + 36 \times 1 - 18 = 10 > 0$; et $\lim\limits_{t \to +\infty} -8t^3 + 36t - 18 = -\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il y aura une racine dans chacun des intervalles $]-\infty; -1[$; $]-1; 0[$ et $]0; +\infty[$, et donc trois racines au total, soit trois points d'inflexion. Inutile de trouver ces racines pour prouver que les trois points correspondants sont alignés : ils seront sur une même droite s'ils vérifient une équation de la forme $ax(t)+by(t)+c=0$, soit $\dfrac{2at^3-3at^2+2bt^2+3b+ct}{t}=0$. On retrouve la condition donnant les points d'inflexion en prenant $2a=-8$, $2b-3a=0$, $c=36$ et $3b=-18$, soit $a=-4$, $b=-6$ et $c=36$. Puisqu'on a trouvé une solution au système, les trois points d'inflexion sont donc situés sur la droite d'équation $-4x-6y+36=0$, ou encore $2x+3y-18=0$, ou enfin $y=-\dfrac{2}{3}x+6$.

Voici la courbe, avec la droite contenant les points d'inflexion en vert :



Problème

Généralités sur f_n.

1. Un cosinus pour difficilement être égal à 2, toutes les focntions sont définies sur $\mathbb{R}$.

2. Puisque $f_n(-x)=\dfrac{-\sin(x)}{2-\cos(x)}+\dfrac{x}{n}=-f_n(x)$, toutes les fonctions sont impaires.

3. Non. Ah, il faut détailler ? En fait, la fonction f_n n'est pas 2π-périodique lorsque $n\geqslant 1$, puisqu'on a alors $f_n(x+2\pi)=f_n(x)-\dfrac{2\pi}{n}$, par contre f_0 est bien 2π-périodique.

4. Vu la relation observée à la question précédente, la courbe représentative de f_n est invariante par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}+\dfrac{2\pi}{n}\overrightarrow{j}$. Cette même courbe est par ailleurs symétrique par rapport à O à cause de l'imparité de f_n. On peut donc se contenter d'étudier sur $[0;\pi]$, on complétera la courbe par symétrie pour obtenir $[-\pi;0]$, puis par translation.

Étude de la fonction f_0.

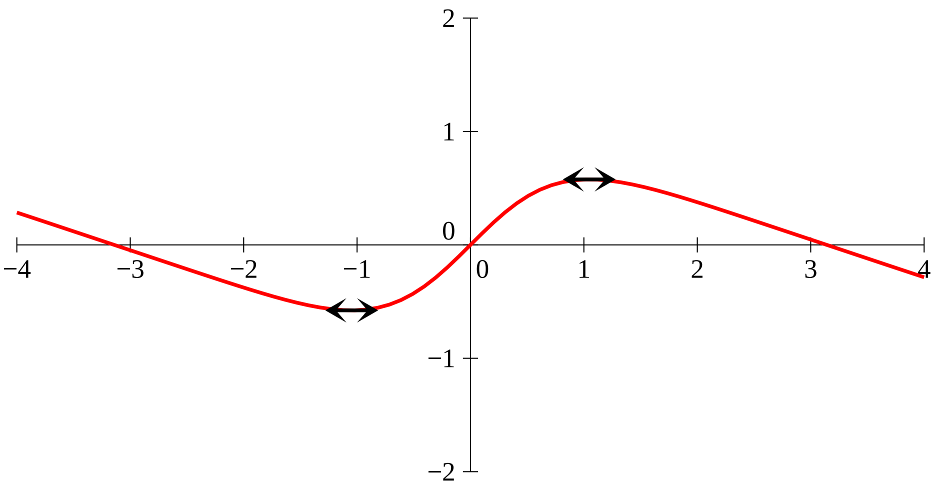
5. La fonction est dérivable comme quotient de fonctions usuelles, de dérivée
$$f_0'(x)=\frac{\cos(x)(2-\cos(x))-\sin(x)\times\sin(x)}{(2-\cos(x))^2}=\frac{2\cos(x)-1}{(2-\cos(x))^2}.$$

6. Cette dérivée est du signe de $2\cos(x)-1$, qui s'annule lorsque $\cos(x)=\frac{1}{2}$, soit $x=\frac{\pi}{3}$. Elle est positive sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

7. Calculons $f_0\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
f	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘ 0

Un repère orthonormal n'est pas très adapté au tracé de la courbe, mais pusiqu'on nous le demande, respectons l'énoncé :



8. La fonction étant 2π-périodique, il suffit de trouver les valeurs extrêmes sur $[-\pi;pi]$. Par imparité, les valeurs obtenues sur $[-\pi;0]$ seront opposées de celles obtenues sur $[0;\pi]$. Le maximum sur $\mathbb{R}$ est donc $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et le minimum $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. En valeur absolue, $|f_0(x)|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Utilisation d'une primitive de f_0.

9. La fonction f_0 étant de la forme $\frac{u'}{u}$, elle a pour primitive $\ln(2-\cos(x))$ (pas besoin de valeur absolue, c'est toujours positif), donc $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(t)}{23-\cos(t)}\,dt=[\ln(2-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\ln(1)=\ln(3)-\ln(2)\simeq 0.4$.

10. Puisqu'on connait une primitive de f_0, c'est immédiat, les solutions sont les fonctions y_h : $x\mapsto Ke^{-\ln(2-\cos(x))}=\frac{K}{2-\cos(x)}$.

11. Cherchons donc, si $y_p(x)=a\cos(x)+b$, alors $y_p'(x)=-a\sin(x)$, et $y_p'(x)+\frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}y_p(x)=-a\sin(x)+\sin(x)\frac{a\cos(x)+b}{2-\cos(x)}$. Il suffit clairement de prendre $a=-1$ et $b=2$ pour trouver $y_p'+f_0y_p=2\sin(x)$. Les solutions complètes sont alors les fonctions $x\mapsto 2-\cos(x)+\frac{K}{2-\cos(x)}$.

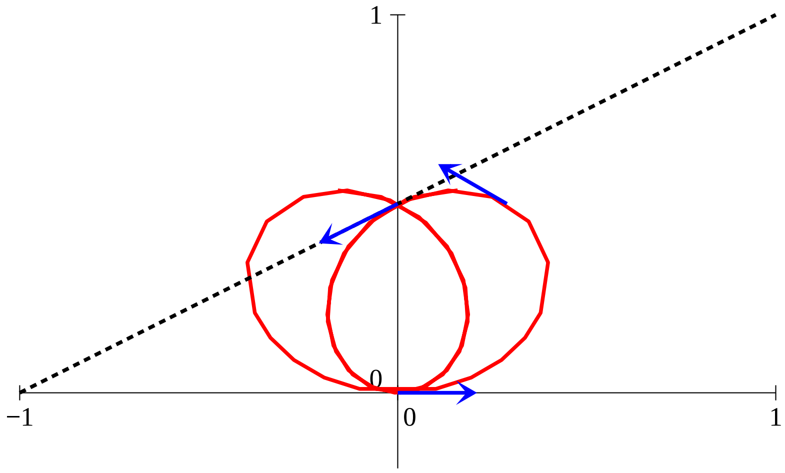
12. La condition $h(0)=1$ donne $1+K=1$, soit $K=0$, donc $h(x)=2-\cos(x)$.

Étude d'une courbe polaire.

13. Il suffit de constater que $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ (à cause de l'imparité de f_0) pour conclure à une symétrie par rapport à (Oy).

14. Calculons $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ (en reprenant la formule obtenue pour f_0'), donc $\overrightarrow{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{4}\overrightarrow{j}$. La tangente a donc pour vecteur normal $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ et passe par le point $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, donc a pour équation $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{4}$, ou si l'on préfère $x - 2y + 1 = 0$.

15. On peut simplement tracer une tangente radiale en 0 et en π (où la courbe passe par l'origine), et une tangente orthoradiale en $\frac{\pi}{3}$ (où la courbe passe par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2}\right)$), en plus évidemment de la tangente calculée à la question précédente.



Étude de la fonction : $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x(2 - \cos(x))}$

16. Encore une question extrêmement difficile : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.

17. Puisqu'on sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, on en déduit que $\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2-1} = 1$.

18. Étant continue et strictement décroissante, la fonction est sûrement bijective. Puisque $g(0) = 1$ et $g(\pi) = 0$, on aura $I = [0; 1]$.

Étude d'une suite qui annule f_n.

19. Constatons que, si $f_n(a) = 0$, alors $\frac{\sin(a)}{2 - \cos(a)} = \frac{a}{n}$, donc $\frac{a}{n} = f_0(a)$. Comme on sait que $|f_0(a)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ (cette majoration est valable partout), on en déduit que $|a| \leqslant \frac{n\sqrt{3}}{3}$, soit $a \in [0; n\sqrt{3}]$.

20. Sur $]0; \pi]$, la condition $f_n(x_n) = 0$ équivaut à $\frac{\sin(x_n)}{x_n(2 - \cos(x_n))} = \frac{1}{n}$, soit $g(x_n) = \frac{1}{n}$. Comme la fonction g est bijective de $[0; \pi]$ vers $[0; 1]$, cette équation admet en effet une unique solution.

21. D'après la question précédente, on peut écrire $x_n = h\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme la fonction h est continue et que $h(0) = \pi$ (puisque $g(\pi) = 0$), on aura $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = \pi$.