Devoir à la Maison n°4

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le vendredi 7 décembre

Exercice

Tracer le plus précisément possible l'arc paramétré défini par la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} x(t) &= 2t^2 - 3t \\ y(t) &= 2t + \dfrac{3}{t} \end{cases}$.

Montrer que la courbe a trois points d'inflexion et que ces points sont alignés.

Problème (deuxième problème du sujet Petites Mines 2006)

Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_n(x) = \dfrac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} - \dfrac{x}{n}$. On note f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_0(x) = \dfrac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$.

Généralités sur f_n.

Soit n un entier naturel fixé.

1. Déterminer le domaine de définition D de f_n.

2. f_n est-elle paire ? f_n est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.

3. f_n est-elle 2π-périodique ?

4. Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur D tout entier. On justifiera sa réponse.

Étude de la fonction f_0.

5. Étudier la dérivabilité de f_0 sur D. Déterminer l'expression de sa dérivée.

6. Étudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0, \pi]$.

7. Déterminer le tableau de variations sur $[0, \pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{E}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on rappelle que : $\sqrt{3}$ a pour valeur $1,732$ comme valeur approchée par défaut à 10^{-3} près).

8. Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Utilisation d'une primitive de f_0.

9. Déterminer une primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{2 - \cos(t)}\, dt$.

Soit l'équation différentielle $(E) : y'(x) + \dfrac{\sin(x)}{2-\cos(x)} y(x) = 2\sin(x)$.

10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E).

11. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a\cos(x) + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

12. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie : $h(0) = 1$.

Étude d'une courbe polaire.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit Γ la courbe définie par l'équation polaire : $\rho = \dfrac{\sin(\theta)}{2-\cos(\theta)}$. Pour tout réel θ on notera $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur $\overrightarrow{u_\theta} = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$ et $M(\theta)$ le point du plan tel que $\overrightarrow{OM(\theta)} = \dfrac{\sin(\theta)}{2-\cos(\theta)}\overrightarrow{u_\theta}$.

13. Soit un élément θ de D. Montrer qu'il existe une symétrie s telle que $s(M(\theta)) = M(-\theta)$.

14. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

15. Tracer l'allure de la courbe Γ.

Étude de la fonction : $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x(2-\cos(x))}$

16. Déterminer le domaine de définition de g.

17. Montrer que g admet une limite finie l en 0.

On prolonge g par continuité en posant : $g(0) = l$.

On admet que g est dérivable sur $]0,\pi]$ et que pour tout x de $]0,\pi]$, $g'(x)$ est strictement négatif.

18. Montrer que g est une bijection entre $[0,\pi]$ et un ensemble I à définir. On notera h sa réciproque.

Étude d'une suite qui annule f_n.

Soit n un entier naturel non nul.

19. Montrer que si a est un réel strictement positif qui annule f_n, alors a appartient à l'intervalle $[0, n\sqrt{3}]$.

20. Montrer qu'il existe un unique réel x_n appartenant à $]0,\pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

21. Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.