Devoir à la Maison n°3 : corrigé

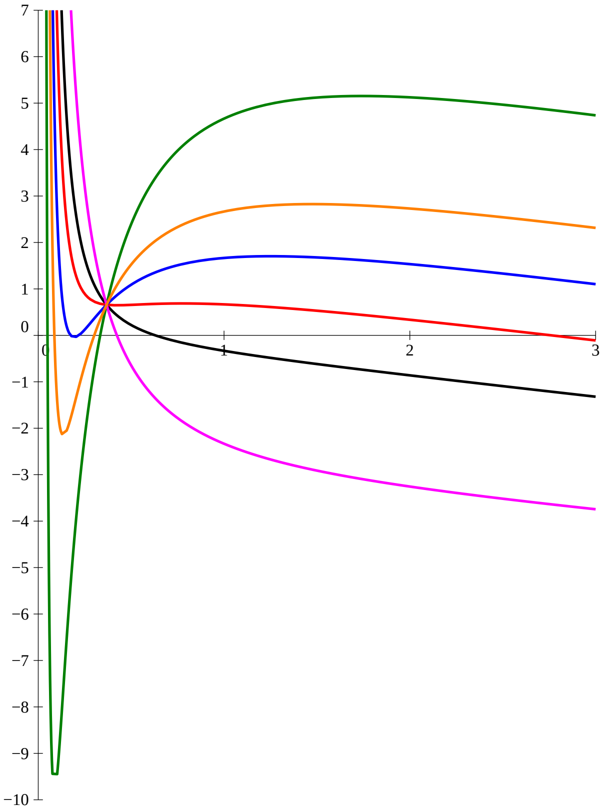
PTSI B Lycée Eiffel

13 novembre 2012

Exercice 1

1. Pour que f puisse vérifier l'équation de départ, il faut certainement qu'elle soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Réécrivons cette équation un peu différemment : $2f'(x) = \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) - 1$. Le membre de droite est obtenu comme produit et composée de fonctions dérivables, donc il constitue une fonction dérivable, ce qui prouve que f' est dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable.
2. Pour obtenir du second ordre, dérivons l'équation de départ : $-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = 2x(2f'(x)+1) + 2x^2f''(x)$. Reste à exprimer le membre de gauche plus simplement. Pour cela, on reprend la relation obtenue dans la première question pour $2f'(x)$ et on l'applique à $\frac{1}{x}$ (attention à bien modifier également le $\frac{1}{x^2}$ à droite) : $2f'\left(\frac{1}{x}\right) = x^2f(x) - 1$. On peut remplacer pour obtenir $-\frac{1}{x^2} \times \frac{x^2f(x)-1}{2} = 4xf'(x) + 2x + 2x^2f''(x)$, soit $-\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2x^2} = 4xf'(x) + 2x + 2x^2f''(x)$. La fonction f est donc solution de l'équation linéaire $2x^2f'' + 4xf' + \frac{1}{2}f = \frac{1}{2x^2} - 2x$.
3. Autrement dit, on pose $f(x) = g(\ln(x))$, ce qui est toujours possible sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut alors dériver deux fois : $f'(x) = \frac{1}{x}g'(\ln(x))$, puis $f''(x) = \frac{1}{x^2}g''(\ln(x)) - \frac{1}{x^2}g'(\ln(x))$. Remettons tout ça dans l'équation obtenue à la question précédente : $2g''(\ln(x)) - 2g'(\ln(x)) + 4g'(\ln(x)) + \frac{1}{2}g(\ln(x)) = \frac{1}{2x^2} - 2x$. En posant $t = \ln(x)$, soit $x = e^t$, la fonction g est donc solution de l'équation à coefficients constants $2g''(t) + 2g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^t$.
4. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $2r^2 + 2r + \frac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 = 0$, et admet donc pour racine double $r = -\frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $g_h : t \mapsto (A+Bt)e^{-\frac{t}{2}}$. Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète, utilisons le principe de superposition. On cherche d'abord une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}e^{-2t}$ sous la forme $y_1(t) = ae^{-2t}$. Cela implique $y_1'(t) = -2ae^{-2t}$ et $y_1''(t) = 4ae^{-2t}$, donc y_1 est solution si $8ae^{-2t} - 4ae^{-2t} + \frac{a}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}e^{-2t}$, soit $a = \frac{1}{9}$. De même, on cherche une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \frac{1}{2}g = 2e^t$ sous la forme $y_2(t) = be^t$, avec cette fois la condition $2b + 2b + \frac{1}{2}b = 2$, donc $b = \frac{4}{9}$. Une solution particulière de l'équation est donc donnée par $g_p(t) = \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^t$, et les solutions complètes de l'équation sont les fonctions $g : t \mapsto (A+Bt)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^t$.

5. En remontant le changement de variables effectué, on doit avoir $f(x) = g(\ln(x)) = \dfrac{A + B\ln(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{9x^2} - \dfrac{4}{9}x$.
6. Comme on a travaillé uniquement par implications, il reste à vérifier si les fonctions obtenues sont vraiment solutions du problème. D'un côté, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \sqrt{x}(A - B\ln(x)) + \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{4}{9x}$; de l'autre $f'(x) = \dfrac{\frac{B}{\sqrt{x}} - \frac{A+B\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} - \dfrac{2}{9x^3} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{2B - A - B\ln(x)}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{2}{9x^3} - \dfrac{4}{9}$, donc $x^2(2f'(x)+1) = \sqrt{x}(2B - A - B\ln(x)) - \dfrac{4}{9x} - \dfrac{8}{9}x^2 + x^2 = \sqrt{x}(2B - A - B\ln(x)) - \dfrac{4}{9x} + \dfrac{x^2}{9}$. Les deux expressions coincident à l'unique condition que $2B - A = A$, soit $A = B$. Les fonctions solutions du problème initial sont donc toutes les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{A(1+\ln(x))}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{9x^2} - \dfrac{4}{9}x$.
   Et même si ce n'était pas demandé, on peut tracer quelques allures de courbes, ici en noir la courbe correspondant à $A = 0$, en rouge $A = 1$, en bleu $A = 2$, en orange $A = 3$, en vert $A = 5$, en rose $A = -2$. Toutes les courbes passent par un point commun pour $x = \dfrac{1}{e}$ (puisqu'alors $1 + \ln(x) = 0$), d'ordonnée $\dfrac{e^2}{9} - \dfrac{4}{9e} \simeq 0.66$.



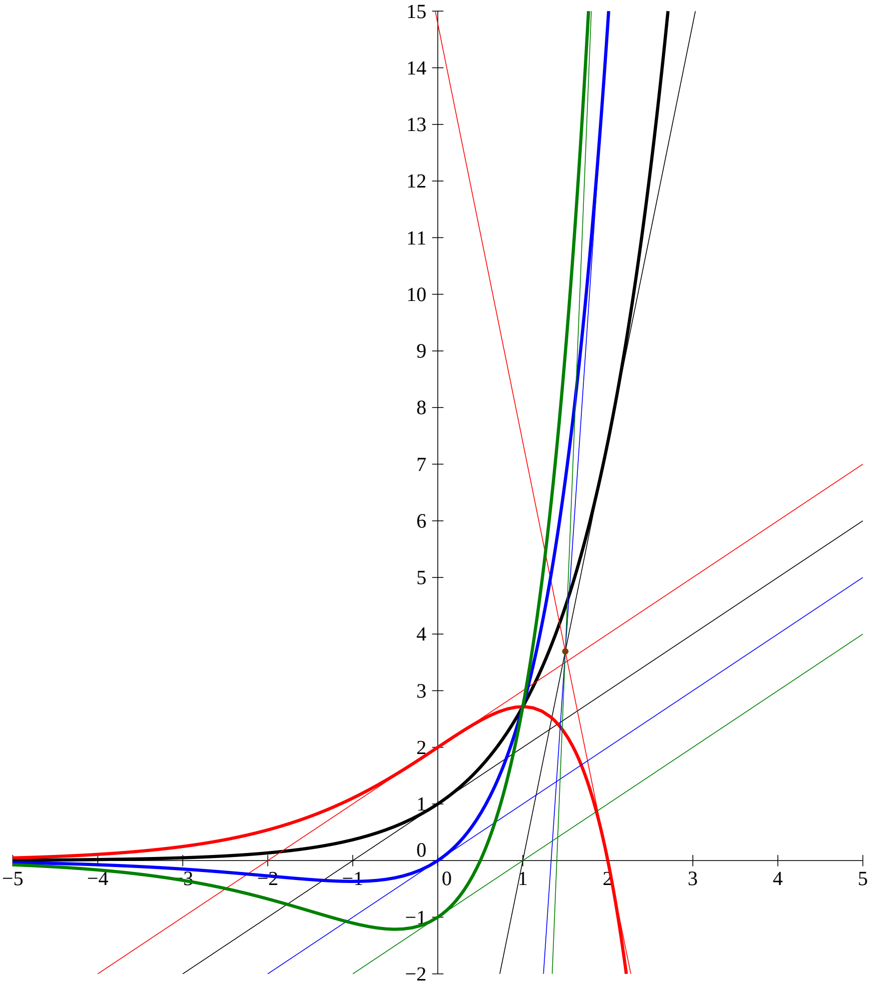
Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle $(1-x)y' + xy = e^x$.

1. Puisqu'il faut diviser par $1 - x$, on va effectuer une résolution séparée sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
2. On cherche donc à résoudre l'équation linéaire $y' + \left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right) y = \dfrac{e^x}{1-x}$. L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{x + \ln|1-x|} = Ke^x(1-x)$ (quitte à

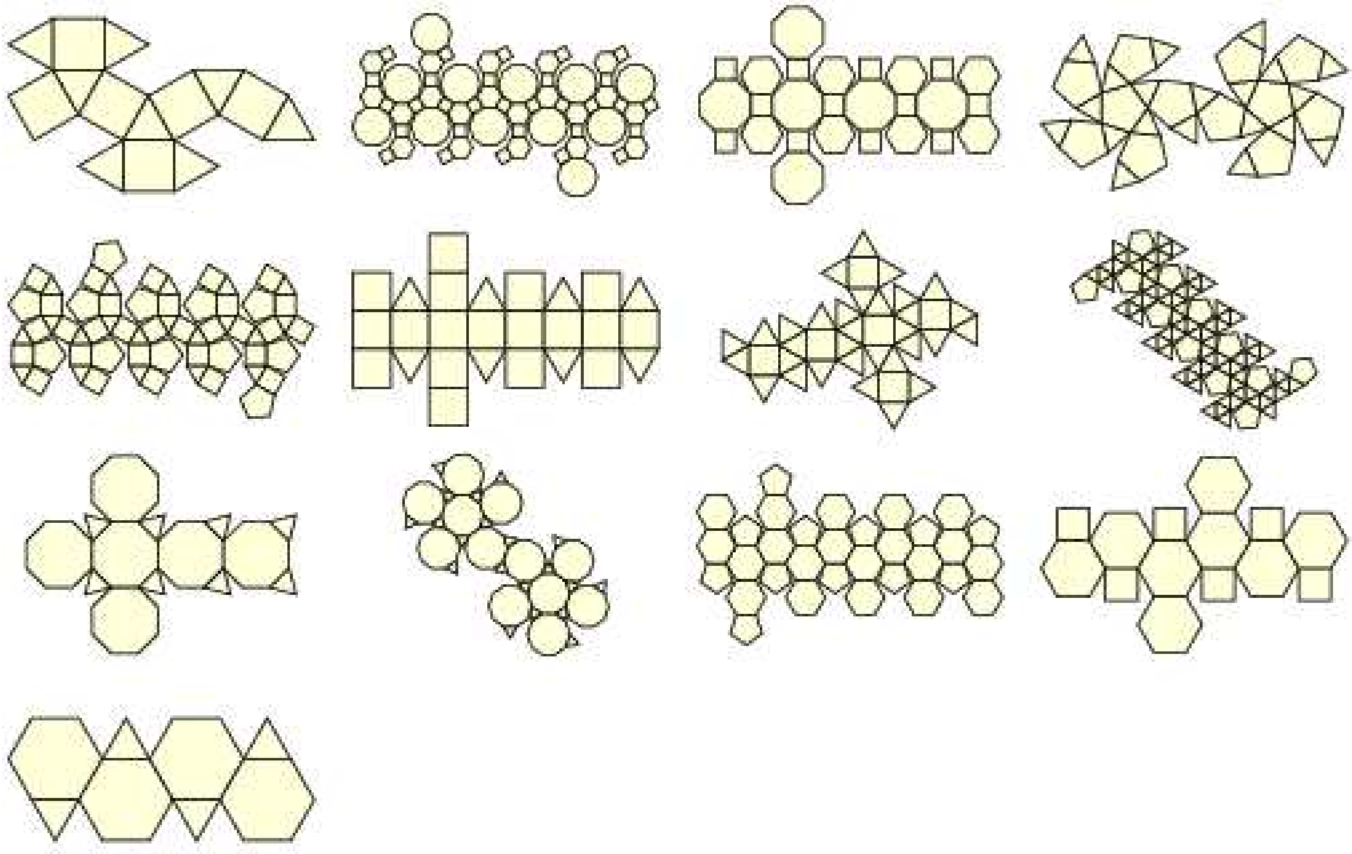
changer le signe de la constante sur $]-\infty;1[$).

3. Pour trouver une solution particulière à l'équation, rien de mieux ici que d'utiliser la méthode de variation de la constante : on cherche $y_p(x) = K(x)(1-x)e^x$, ce qui donne $y_p'(x) = K'(x)(1-x)e^x - K(x)e^x + K(x)(1-x)e^x$. La fonction y_p est donc solution de l'équation initiale si $K'(x)(1-x)e^x - K(x)e^x + K(x)(1-x)e^x + K(x)e^x - K(x)e^x(1-x) = \frac{e^x}{1-x}$, c'est-à-dire si $K'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. On peut choisir $K(x) = \frac{1}{1-x}$, soit $y_p(x) = e^x$. Bon, euh oui, en fait on aurait pu se rendre compte que cette solution était plus ou moins évidente. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto (1 + K(1-x))e^x$.
4. Les fonctions obtenues sont certainement définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles vérifient toutes $y(1) = e$, et comme $y'(x) = (-K + 1 + K(1-x))e^x = (1 - Kx)e^x$, on a $y'(1) = (1-K)e$. On ne peut donc pas recoller des morceaux ayant une valeur distincte de la constante K.
5. Avec la forme précédente, $y(0) = 1 + K$, donc $f(0) = \alpha$ se produit si et seulement si $K = \alpha - 1$. La solution cherchée est bien unique. De plus, $y'(0) = 1$ quelle que soit la valeur de K, donc les tangentes de toutes les solutions en 0 sont effectivement parallèles.
6. Continuons nos petits calculs : $y(2) = (1-K)e^2$, et $y'(2) = (1-2K)e^2$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donc $(1-2K)e^2(x-2) + (1-K)e^2 = [(1-2K)x + 3K - 1]e^2$. Si on veut que toutes ces droites soient concourantes, il faut trouver une valeur de x pour laquelle l'expression précédente ne dépend pas de K, ce qui est effectivement le cas si $-2Kx + 3K = 0$, soit $x = \frac{3}{2}$. On a alors toujours $y = \frac{e^2}{2}$, les tangentes se coupent donc au point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}; \frac{e^2}{2}\right)$.
7. Rien de bien difficile, la dérivée s'annule pour $x = \frac{1}{K}$ (sauf évidemment dans le cas particulier $K = 0$, où y est simplement la fonction exponentielle qu'on n'a pas vraiment besoin d'étudier), la fonction est croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{K}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{1}{K}; +\infty\right[$, la limite de y en $-\infty$ est toujours nulle (pas croissance comparée), en $+\infty$ ça dépend du signe de K : si $K < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$, et si $K > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$.
8. On peut bien évidemment tracer les tangentes étudiées plus haut en plus des courbes des fonctions, qui correspondent à $K = -1$, $K = 0$ (fonction exponentielle), $K = 1$ et $K = -2$. En bleu $\alpha = 0$, en noir $\alpha = 1$, en rouge $\alpha = 2$ et en vert $\alpha = -1$. Les tangentes en 0 ont pour équations respectives $y = x$, $y = x + 1$, $y = x + 2$ et $y = x + 3$. Et les tangentes en 2 ont pour équation respectives $y = (3x - 4)e^2$, $y = (x - 1)e^2$, $y = (-x + 2)e^2$ et $y = (5x - 7)e^2$.

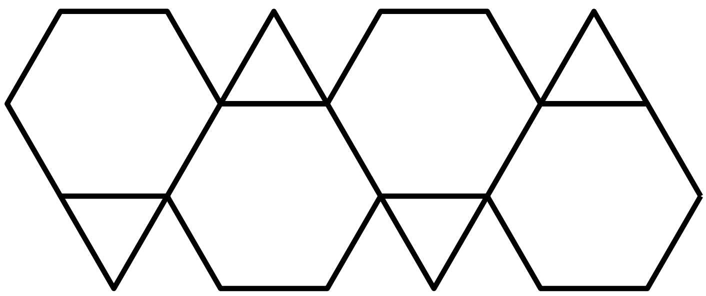


Pour s'occuper pendant les vacances

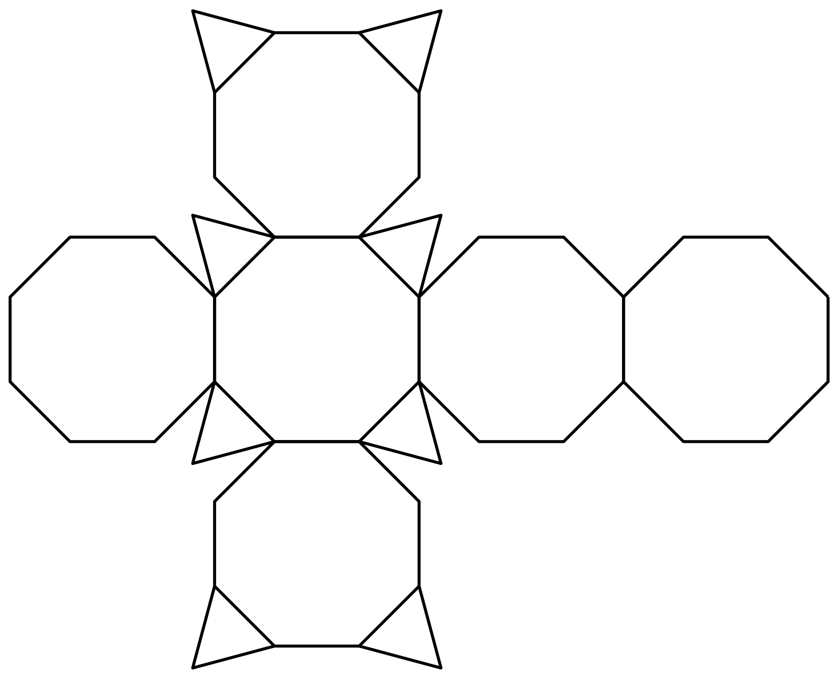
Je vous mets pour commencer une image illisible contenant les patrons de tous les solides d'Archimède, issue de la même page que le fichier inclus dans votre énoncé de DM. De gauche à droite sur la première ligne : le cuboctaèdre, l'icosidodécaèdre tronqué, le cuboctaèdre tronqé, l'icosidodécaèdre. Deuxième ligne : le petit rhombicosidodécaèdre, le petit rhombicuboctaèdre, le cube adouci et le dodécaèdre adouci. Troisième ligne : le cube tronqué, le dodécaèdre tronqué, l'icosaèdre tronqué et l'octaèdre tronqué. Et tout seul dans son coin sur la quatrième ligne, le tétraèdre tronqué.



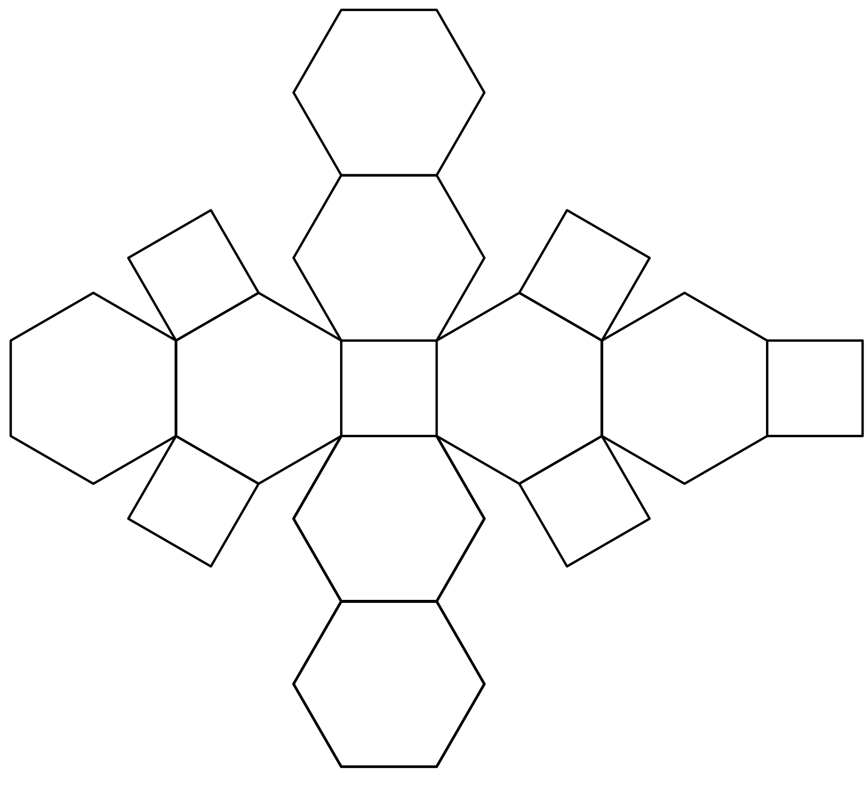
Et comme vous allez protester à juste titre que c'est vraiment illisible, j'en mets quelques-uns en plus gros (ceux qui ne prennent pas douze pages pour qu'on puisse voir quelque chose). Commençons par le tétraèdre tronqué, constitué du nombre ridiculement petit de huit faces (quatre hexagones, quatre triangles équilatéraux). Il se nomme ainsi car on peut l'obtenir à partir du tétraèdre régulier en coupant ses coins.



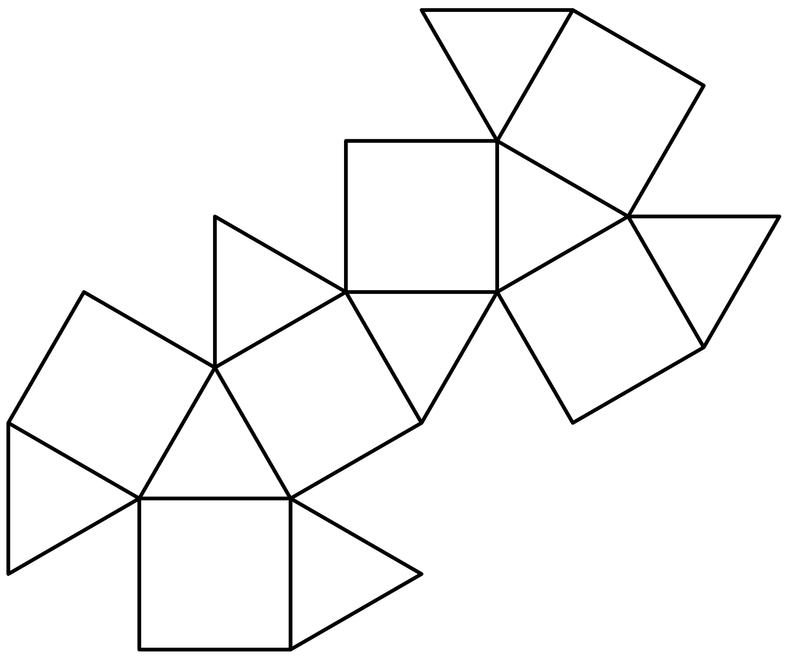
Enchainons avec le cube tronqué (vous l'aurez deviné, on peut l'obtenir en coupant les coins d'un cube) qui a 14 faces, six octogones et huit triangles équilatéraux.



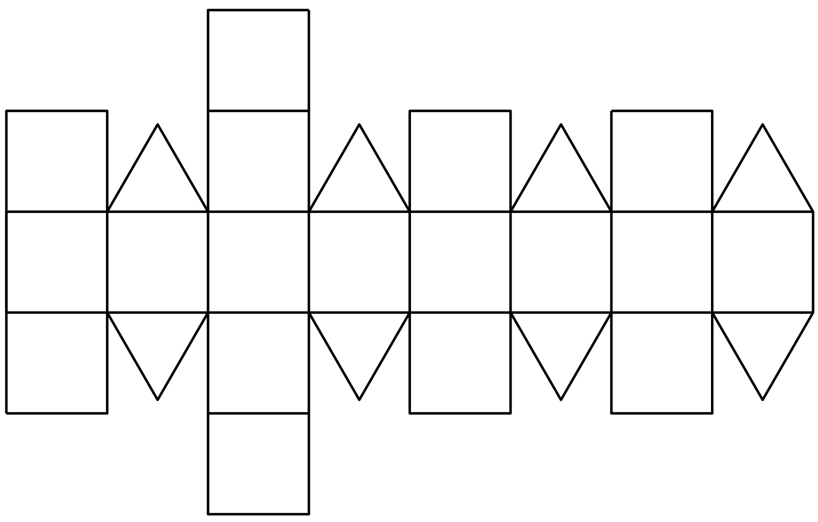
Toujours avec 14 faces, nous avons l'octaèdre tronqué : six carrés et huit hexagones.



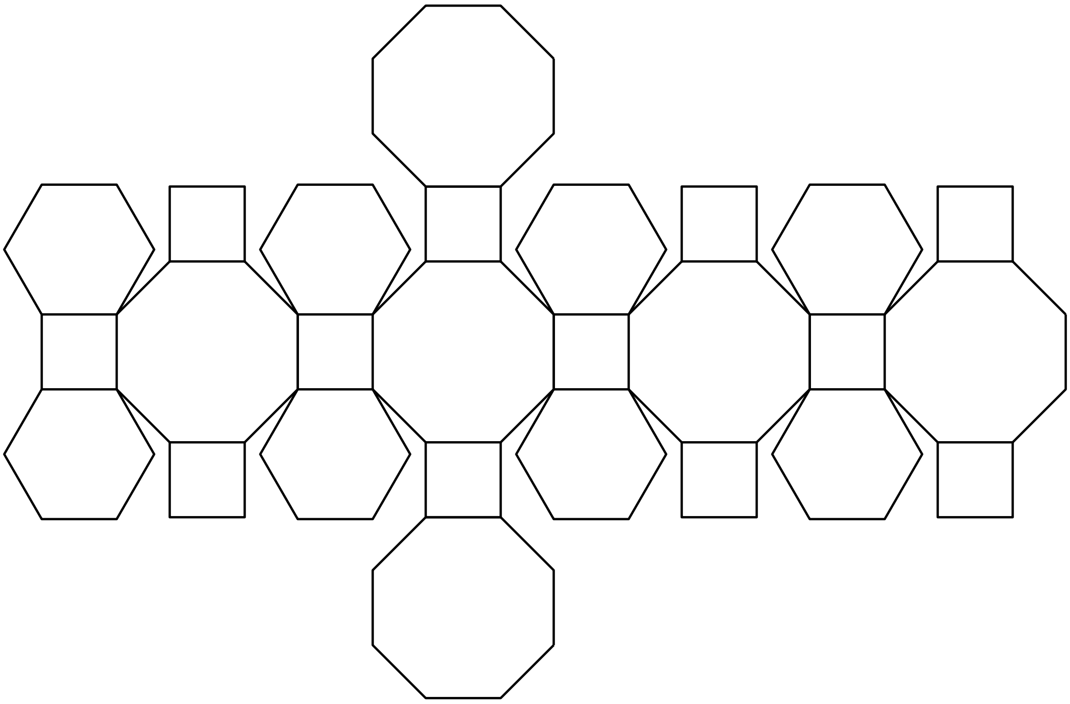
Dernier specimen à 14 faces, qui pour le coup n'est obtenu en tronquant personne, le cuboctaèdre, six carrés et huit triangles équilatéraux.



On enchaîne avec 26 faces pour le petit rhombicuboctaèdre (dix-huit carrés et huit triangles équilatéraux) :



Et également 26 faces pour le cuboctaèdre tronqué (oui, on peut tronquer des polyèdres qui ne sont déjà plus réguliers et obtenir d'autres solides d'Archimède), premier à avoir trois types de faces avec douze carrés, huit hexagones et six octogones.



Je vous épargne les patrons suivants. À 32 faces, nous avons le dodécaèdre tronqué (vingt triangles équilatéraux et douze décagones, bon courage pour tracer un patron avec des décagones) ; l'icosaèdre tronqué (douze pentagones et vingt hexagones, c'est lui le ballon de football) et l'icosidodécaèdre (vingt triangles équilatéraux et douze pentagones). On passe à 38 faces pour le cube adouci (six carrés et pas moins de trente-deux triangles équilatéraux), puis à 62 pour l'icosidodécaèdre tronqué (trente carrés, vingt hexagones et douze décagones, forcément, en tronquant des horreurs on obtient pas des trucs très beaux) et pour le petit rhombicosidodécaèdre (vingt triangles équilatéraux, trente carrés et douze pentagones) et enfin le record : 92 faces pour le cube dodécaèdre adouci (douze pentagones et quatre-vingt triangles équilatéraux). En fait, le cube et le dodécaèdre adoucis peuvent être visualisés en partant du cube et du dodéaèdre, et en insérant des rangées de triangles équilatéraux autour de chaque face (d'où leur nom).

Vous pouvez compter le nombre de faces F, d'arêtes A et de sommets S pour chacun de ces solides, et vérifier qu'on a toujours $S - A + F = 2$. Prenons par exemple le petit rhombicosidodécaèdre : il a 62 faces. Chacune des 20 faces triangulaires contient trois arêtes, chaque face carrée quatre arêtes et chaque face pentagonale cinq arêtes, donc $3 \times 20 + 4 \times 30 + 5 \times 12 = 240$ arêtes, à diviser par deux puisque chaque arête est commune à deux faces. Notre solide contient donc 120 arêtes. Même type de calcul pour les sommets, en constantant que chaque sommet est commun à quatre faces : on tombe donc sur $\dfrac{240}{4} = 60$ sommets. On vérifie que $62 - 120 + 60 = 2$.

Allez, pour finir en beauté, un patron de cube adouci :