Devoir à la Maison n°3

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le mardi 13 novembre

Exercice 1

On cherche dans cet exercice toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f'(x)+1)$. On va pour cela raisonner par analyse et synthèse (c'est-à-dire qu'on va chercher à déterminer le plus de caractéristiques possibles des solutions du problème, de manière à leur donner une forme précise, et on vérifiera ensuite que les fonctions de cette forme sont effectivement solutions).

1. Soit donc f une telle fonction. Prouver que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer une équation linéaire du second ordre vérifiée par f.
3. En posant $g(t) = f(e^t)$, déterminer une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont g est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions possibles de l'équation de départ.
6. Conclure.

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle $(1-x)y' + xy = e^x$.

1. Sur quels intervalles va-t-on se placer pour résoudre l'équation normalisée ?
2. Résoudre sur chacun de ces intervalles l'équation homogène associée à notre équation différentielle. On pourra remarquer que $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - 1$.
3. En déduire les solutions de l'équation complète sur les intervalles définis à la première question.
4. Étudier l'existence de solutions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Montrer qu'il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, qu'on notera f_α, vérifiant $f(0) = \alpha$, et que toutes ces solutions ont des tangentes parallèles en 0.
6. Montrer que les tangentes en leur point d'abscisse 2 aux courbes représentatives des fonctions f_α sont toutes concourantes.
7. Étudier les fonctions f_α sur $\mathbb{R}$ (variations, limites).
8. Tracer dans un même graphique les courbes intégrales correspondant à $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et $\alpha = -1$.

Pour s'occuper pendant les vacances

Un polyèdre régulier est un solide de l'espace constitué de faces qui sont toutes des polygones réguliers isométriques. On sait depuis l'Antiquité qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre (quatre faces triangulaires), le cube (six faces carrées), l'octaèdre (huit faces triangulaires), le dodécaèdre (douze faces pentagonales) et l'icosaèdre (vingt faces triangulaires). Si on autorise deux types de polygones réguliers au lieu d'un seul, on peut définir une nouvelle classe d'objets appelés polyèdres semi-réguliers, qui sont beaucoup plus nombreux. Parmi eux se trouvent notamment les 13 solides d'Archimède, dont vous trouverez ci-dessous une allure (ainsi que le nom anglais ; c'est pas très beau mais je n'ai pas eu envie de refaire toutes les figures à la main moi-même). Votre mission consiste à dessiner un patron d'un de ces solides (et vous avez le droit de constuire le solide en question et de le poser sur votre bureau pour décorer si vous le souhaitez).