Devoir à la Maison n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

vendredi 5 octobre

Exercice

Commençons par la méthode bourrine, on pose donc $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan(x)$. Il faut déjà réussir à déterminer le domaine de définition de f. En constatant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant x^2 < x^2+1$, on peut prendre la racine carrée pour obtenir $|x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $-\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}$. On a donc toujours $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, donc $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ existe sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme la fonction arctan est également définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ également puisque l'expression à l'intérieur de l'arcsinus ne prend jamais les valeurs -1 et 1. Dérivons donc : $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1-x^2}} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{x^2+1} = 0$. La fonction f est donc constante. Comme $f(0) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0$, f est la fonction nulle, ce qui prouve l'égalité demandée.

Deuxième méthode, on pose $x = \tan(\theta)$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (on peut toujours, la focntion tan étant bijective de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. On a bien évidemment $\arctan(\tan(\theta)) = \theta$ sur cet intervalle (ce ne serait pas vrai pour un θ quelconque), et par ailleurs $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} = \tan(\theta)\sqrt{\cos^2(\theta)}$. Comme $\cos(\theta)$ est positif sur l'intervalle considéré, $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \tan(\theta)\cos(\theta) = \sin(\theta)$. Et comme on est justement dans l'intervalle où $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$ (la vie est bien faite), on trouve $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \theta$, ce qui prouve l'égalité.

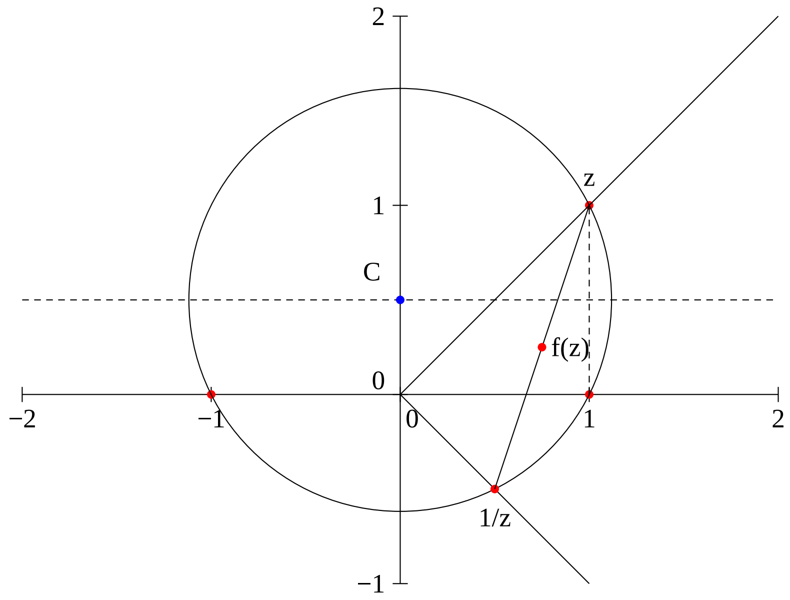
Problème

1. Commençons par 0 : il faut résoudre $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$. En mettant au même dénominateur et en se débarassant du $\frac{1}{2}$, on se ramène à $z^2 + 1 = 0$, soit deux antécédents $z = i$ et $z = -i$. De même, les antécédents de 1 sont donnés par les solutions de l'équation $\frac{z^2+1}{z} = 2$, soit $z^2 - 2z + 1 = 0$. On reconnait à gauche l'identité remarquable $(z-1)^2$, le seul antécédent de 1 est donc 1 lui-même. Restent enfin les antécedents de $1+i$, qui vont cette fois découler de la résolution de $\frac{z^2+1}{z} = 2+2i$, soit $z^2 - (2+2i)z + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = (2+2i)^2 - 4 = 4 + 8i - 4 - 4 = 4(2i-1)$. Cherchons donc à déterminer une racine carrée de $2i-1$ (il suffira de la multiplier par 2 ensuite) en posant $\delta = a + ib$, et en cherchant à avoir $\delta^2 = 2i - 1$. On obtient les conditions $a^2 - b^2 = -1$ et $2ab = 2$, et en ajoutant la condition sur le module $a^2 + b^2 = \sqrt{5}$. On en déduit que $2a^2 = \sqrt{5} - 1$ et $2b^2 = \sqrt{5} + 1$,

soit en constatant que a et b doivent être de même signe $\delta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$, soit une racine carrée de Δ égale à $\tau = \sqrt{2\sqrt{5}-2} + i\sqrt{2\sqrt{5}+2}$. Enfin, les antécédents de $1+i$ seront les deux nombres complexes $z_1 = \dfrac{2+2i+\tau}{2} = 1+i+\delta$, et $z_2 = 1+i-\delta$.

2. Reprenons la même méthode qu'à la question précédente : $\dfrac{z^2+1}{z} = 2a$ donne $z^2 - 2az + 1 = 0$. Cette équation a un discriminant $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2-1)$. Comme $a \in]-1;1[$, on peut poser $a = \cos(\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{R}\right\}$. On a alors $\Delta = -4\sin^2(\theta)$, dont une racine carrée est $2i\sin(\theta)$. L'équation admet deux solutions complexes $z_1 = \dfrac{2a + 2i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$, et son conjugué $z_2 = e^{-i\theta}$. Ces deux solutions ont bien pour module 1, et sont distinctes avec la condition qu'on a imposée à θ.
3. Revenons à notre équation $z^2 - 2az + 1 = 0$, avec cette fois-ci $a \in \mathbb{C}$. Cette équation a toujours au moins une solution (complexe) donc l'application f est effectivement surjective. Elle en aura même toujours deux, sauf dans les cas où on tombe sur un discriminant nul. Ce discriminant étant égal à $4(a^2-1)$, il s'annule lorsque $a = 1$ (cas déjà constaté dans la première question) ou $a = -1$. Toutes les autres valeurs de a auront exactement deux antécédents par f.
4. (a) Le facteur $\dfrac{1}{2}$ n'ayant aucune importance ici, $f(z) \in \mathbb{R}$ se produira si $\dfrac{z^2+1}{z} \in \mathbb{R}$, soit $(z^2+1)\overline{z} \in \mathbb{R}$. Posons donc $x + iy$, on a alors $(z^2+1)\overline{z} = (a^2 - b^2 + 2iab + 1)(a - ib)$. La partie imaginaire de ce nombre doit être nulle, soit $-a^2b + b^3 + 2a^2b - b = 0$. En factorisant par b, on a soit $b = 0$, soit $a^2 + b^2 - 1 = 0$. Autrement dit, z doit être un nombre réel (pas de surprise, il est évident que les images par f de nombres réels sont réelles) ou appartenir au cercle trigonométrique (pas de surprise non plus, on a vu à la question 2 que $f(e^{i\theta}) = \cos(\theta) \in \mathbb{R}$.
   (b) On reprend bien évidemment le calcul précédent (inutile de le refaire), et cette fois c'est la partie réelle qui doit être nulle, soit $a^3 - b^2a + 2ab^2 + a = 0$. On factorise cette fois-ci par a pour obtenir $a = 0$ ou $a^2 + b^2 + 1 = 0$. Le nombre complexe z doit donc appartenir à l'axe imaginaire (là encore, pas de surprise, si z est un imaginaire pur, $\dfrac{1}{z}$ aussi, et $f(z)$ également) ou ...rien du tout puisque la deuxième équation est celle d'un cercle de rayon négatif, autrement dit de l'ensemble vide.
   (c) Reprenons encore le même calcul, on doit avoir cette fois-ci $a(a^2+b^2-1) > 0$ (les divisions par 2 ou par $|z|$ qu'on a effectués au départ pour simplifier les équations ne changent rien au signe du résultat obtenu). Deux possiblités : soit $a > 0$ et $a^2 + b^2 > 1$, c'est-à-dire qu'on se trouve dans le demi-plan supérieur et au-dessus de la forontière formée par le demi-cercle trigonométrique ; soit $a < 0$ et $a^2 + b^2 < 1$, on est alors à l'intérieur du demi-disque trigonométrique inférieur.
5. Si z est réel, les points sont de toute évidence alignés. Sinon, la condition de cocyclicité se traduit par $\arg\left(\dfrac{z-1}{\frac{1}{z}-1}\right) = \arg\left(\dfrac{z+1}{\frac{1}{z}+1}\right)[\pi]$ (quatre points A, B, C et D sont cocycliques si $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})[\pi]$), soit $\arg\left(\dfrac{z^2+z}{z+1}\right) = \arg\left(\dfrac{z^2-z}{1-z}\right)$. Cela se simplifie en $\arg(z) = \arg(-z)[\pi]$, c'est vrai. Si on suppose connues les constructions géométriques de base à la règle et au compas (médiatrices notamment), on peut alors procéder comme suit pour construire $f(z)$: on construit le cercle circonscrit au triangle formé par les images de 1, -1 et z, puis on construit l'intersection de ce cercle avec la symétrique de la demi-droite (Oz) par rapport à l'axe réel (en effet $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ est un multiple positif de $\overline{z}$, donc est situé sur cette demi-droite).

   Il ne reste plus qu'à construire le milieu du segment reliant z et $\dfrac{1}{z}$. Illustration sur la figure cidessous (évidemment, il n'y a pas tous les traits de construction), avec $z = 1 + i$. En pointillés, le tracé permettant d'obtenir une médiatrice du triangle et de construire le centre C du cercle circonscrit (la deuxième médiatrice est l'axe imaginaire, ce sera le cas pour n'importe quel choix de z), en traits pleins le cercle et les demi-droite évoqués ci-dessus.



6. On peut déjà constater que les points N, M et M' sont alignés puisque N est le milieu de $[MM']$. Il faut donc uniquement vérifier la condition sur les angles, c'est-à-dire que $\arg\left(\dfrac{z - \frac{1}{z}}{f(z) - 1}\right) = \arg\left(\dfrac{f(z) + 1}{z - \frac{1}{z}}\right)$, soit encore en multipliant tout par $2z$, $\arg\left(\dfrac{2z^2 - 2}{z^2 + 1 - 2z}\right) = \arg\left(\dfrac{z^2 + 1 + 2z}{2z^2 - 2}\right)$. On reconnait de belles identités remarquables, en écrivant les arguments de quotients comme différences d'arguments, on doit avoir $\arg(2(z^2 - 1)) - \arg((z-1)^2) = \arg((z+1)^2) - \arg(2(z^2 - 1))$, soit $\arg(z+1) + \arg(z-1) - 2\arg(z-1) = 2\arg(z+1) - \arg(z-1) - \arg(z+1)$. Encore une fois, on ne peut que constater que cette égalité est toujours vérifiée.

7. (a) Courage, calculons : $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$, donc $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(1 + i + \dfrac{1-i}{2}\right) = \dfrac{3+i}{4}$.
On recommence : $\dfrac{4}{3+i} = \dfrac{4(3-i)}{10} = \dfrac{6-2i}{5}$, donc $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3+i}{4} + \dfrac{6-2i}{5}\right)$ $= \dfrac{15 + 5i + 24 - 8i}{40} = \dfrac{39 - 3i}{40}$.
Et on y retourne : $\dfrac{40}{39 - 3i} = \dfrac{40(39 + 3i)}{1530} = \dfrac{52 + 4i}{51}$, donc $z_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{39 - 3i}{40} + \dfrac{52 + 4i}{51}\right) = \dfrac{1\ 989 - 153i + 2\ 080 + 160i}{4\ 080} = \dfrac{4\ 069 + 7i}{4\ 080}$.
Et un dernier pour la route, en maudissant intérieurement le concepteur du sujet : $\dfrac{4\ 080}{4\ 069 + 7i} = \dfrac{4\ 080(4\ 069 - 7i)}{16\ 556\ 810} = \dfrac{97\ 656 - 168i}{97\ 393}$, donc
$z_4 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4\ 069 + 7i}{4\ 080} + \dfrac{97\ 656 - 168i}{97\ 393}\right) = \dfrac{396\ 292\ 117 + 681\ 751i + 398\ 436\ 480 - 685\ 440i}{794\ 726\ 880} = \dfrac{46\ 748\ 741 - 217i}{46\ 748\ 640}$. À défaut de trouver ces calculs palpitants, on peut constater que la partie réelle de z_n a l'air de se rapprocher rapidement de 1, et la partie imaginaire de 0.

(b) Pour que la suite soit bien définie, il faut qu'on soit toujours capable de calculer $f(z_n)$, ce qui nécessite d'avoir $z_n \neq 0$. Or, on a vu plus haut que les antécédents des imaginaires purs (0 compris) étaient imaginaires purs. Prouvons donc par récurrence que z_n ne sera jamais imaginaire pur, ce qui prouvera que z_{n+1} est toujours calculable et donc que la suite est bien définie. C'est en fait une récurrence triviale : $z_0 \notin i\mathbb{R}$ par hypothèse, et si $z_n \notin i\mathbb{R}$, z_{n+1} non plus puisqu'il possède un antécédent par f qui n'est pas imaginaire pur. La suite est donc bien définie.

(c) On peut rédiger sous forme de récurrence descendente : si $z_n = -1$, alors $z_{n-1} = -1$ puisque -1 n'a que lui-même comme antécédent. On prouve ainsi que tous les termes de la suite précédent z_n sont égaux à -1, jusqu'à $z_0 = -1$.

(d) En effet, puisqu'on aura jamais $z_n = -1$ d'après la question précédente, la suite (u_n) est bien définie. De plus, $u_{n+1} = \dfrac{z_{n+1} - 1}{z_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{1}{2}(z_n + \frac{1}{z_n}) - 1}{\frac{1}{2}(z_n + \frac{1}{z_n}) + 1} = \dfrac{z_n^2 - 1 - 2z_n}{z_n^2 + 1 + 2z_n} = \left(\dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}\right)^2 = u_n^2$.

(e) Prouvons par récurrence que $u_n = (u_0)^{2^n}$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = (u_0)^1$. Supposons la propriété vraie au rang n, alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = (u_n)^2 = (u_0^{2^n})^2 = (u_0)^{2^{n+1}}$, ce qui achève de prouver la formule.

(f) On a $u_0 = \dfrac{z_0 - 1}{z_0 + 1}$, donc $|u_0| = \dfrac{|z_0 - 1|}{|z_0 + 1|}$. En posant $z_0 = a + ib$, on trouve $|u_0| = \dfrac{|a + ib - 1|}{|a + ib + 1|} = \sqrt{\dfrac{(a-1)^2 + b^2}{(a+1)^2 + b^2}}$. Ce module sera égal à 1 si $(a-1)^2 = (a+1)^2$, c'est-à-dire lorsque $a = 0$, ce qui est exclus depuis qu'on a décrété que $z_0 \notin i\mathbb{R}$. On aura $|u_0| < 1$ lorsque $a > 0$ car on a alors $(a-1)^2 < (a+1)^2$ puisque $|a-1| < |a+1|$, et de même $|u_0| > 1$ si $a < 0$.

(g) Si z_0 a une partie réelle négative, on aura $|u_n| = |u_0|^{2^n}$ qui va diverger vers $+\infty$ puisque $|u_0| > 1$, la suite (u_n) ne peut pas converger, et (z_n) non plus (si cette dernière convergeait vers l, (u_n) convergerait vers $\dfrac{l-1}{l+1}$ au vu de la définition de u_n). Par contre, si $|u_0| < 1$, le module de u_n va converger vers 0, et la suite (u_n) également (mis sous forme trigonométrique, on n'a aucune difficulté à voir que partie réelle et imaginaire vont tendre vers 0). Comme $u_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$, on a $u_n z_n + u_n = z_n - 1$, soit $z_n = \dfrac{-1 - u_n}{u_n - 1}$. Ce quotient va converger vers $\dfrac{-1}{-1} = 1$, ce qui confirme les observation faites à partir de $z_0 = 1 + i$.