Devoir à la Maison n°2

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le vendredi 5 octobre

Exercice

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x)$ de deux façons différentes : via un calcul de dérivée ; et par un calcul direct. Dans les deux cas, on veillera à bien justifier que l'égalité est vrai sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. On identifiera le point M d'affixe z dans le plan complexe avec le nombre complexe z.

1. Déterminer les antécédents par f de 0, de 1, et de $1+i$.
2. Soit $a \in]-1;1[$ (a est donc un nombre réel). Montrer que a admet par f deux antécédents, qui sont de module 1 et conjugués l'un de l'autre.
3. Montrer que tout nombre complexe admet au un antécédent par f (on dit que l'application f est surjective), et déterminer le nombre d'antécédents de chaque nombre complexe.
4. (a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la partie imaginaire de $f(z)$ est strictement positive.
5. Montrer que les points 1, -1, z et $\dfrac{1}{z}$ sont cocycliques ou alignés. En déduire une construction géométrique de $f(z)$ à partir de z.
6. En notant A et B les points d'affixe 1 et -1 ; M, M' les points d'affixe z et $\dfrac{1}{z}$, et N le point d'affixe $f(z)$, montrer que, si M est distinct de A et de B, (MM') est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$.
7. Soit $z_0 \notin i\mathbb{R}$. On construit une suite de nombres complexes (z_n) en posant, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = f(z_n)$.
   (a) Déterminer les quatre premiers termes (z_0 exclus, on va jusqu'à z_4) de la suite dans le cas où $z_0 = 1+i$.
   (b) Montrer que la suite (z_n) est bien définie.
   (c) Montrer que, si $z_n = -1$ pour un certain entier n, alors $z_0 = -1$.
   (d) On suppose désormais $z_0 \neq -1$, et on pose $u_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$. Justifier que (u_n) est bien définie, et déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (e) En déduire u_n en fonction de n et de u_0.
   (f) Que peut-on dire de $|u_0|$ selon la partie réelle de z_0 ?
   (g) Étudier la convergence de (z_n) en fonction de z_0 (on dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) converge si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent toutes deux, ou alternativement si $|z_n - l|$ tend vers 0, où l est la limite de la suite).