Devoir à la Maison n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 septembre 2012

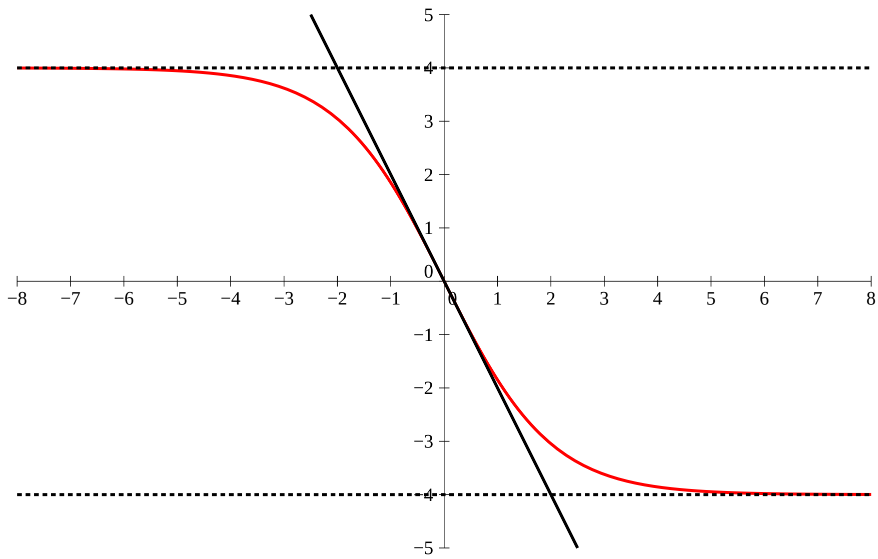
Problème (vieux sujet de bac)

Partie A

1. Le calcul le plus facile est celui de la limite en $-\infty$, où on a sans difficulté $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$ en exploitant le fait que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. De l'autre côté, pour être rigoureux, on peut factoriser par e^x pour faire disparaitre l'indétermination : $f(x) = \dfrac{4e^x(e^{-x} - 1)}{e^x(e^{-x} + 1)} = -4\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. De là, on conclut facilement : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -4$. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ en $-\infty$, et une autre d'équation $y = -4$ en $+\infty$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4\dfrac{-e^x(1 + e^x) - e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^2} = -4e^x\dfrac{2}{(1 + e^x)^2} = \dfrac{-8e^x}{(1 + e^x)^2}$. Cette dérivée est toujours négative (puisque l'exponentielle est positive), donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	4 $\searrow$	-4

3. Puisque $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{-8}{2^2} = -2$, la tangente (T) a pour équation $y = -2x$.
4. Le domaine de définition de f est évidemment symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = \dfrac{4(1 - e^{-x})}{1 + e^{-x}} = -f(x)$ au vu du calcul effectué plus haut pour la limite de f en $+\infty$. La fonction f est donc impaire.
5. Voici les courbes :



Partie B

1. On reconnait dans l'intégrale un quotient de la forme $\dfrac{u'}{u}$, qui s'intègre donc directement : $I = [\ln(1+e^x)]_{-3}^{0} = \ln(2) - \ln(1+e^{-3}) = \ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3}}\right)$.
2. Partons donc du résultat annoncé : $4 - \dfrac{8e^x}{1+e^x} = \dfrac{4+4e^x-8e^x}{1+e^x} = \dfrac{4(1-e^x)}{1+e^x} = f(x)$.
3. Puisque l'unité du repère est 1 cm, l'aire recherchée correspond à $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\ dx = \int_{-3}^{0} 4 - \dfrac{8e^x}{1+e^x} = 12 - 8\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3}}\right)$. La calculatrice donne une valeur approchée de 6.84.
4. Puisque la courbe est située sous sa tangente sur $[-3;0]$, cette nouvelle aire correspond à $\displaystyle\int_{-3}^{0} -2x - f(x) = [-x^2]_{-3}^{0} - \int_{-3}^{0} f(x)\ dx = 9 - 12 + 8\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3}}\right) = 8\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3}}\right) - 3 \simeq 2.16$.

Partie C

1. En effet, au vu des limites de la fonction et de sa décroissance, f est minorée (strictement) par -4 et majorée par 4, l'équation $f(x) = \alpha$ ne peut donc avoir de solution que si $-4 < \alpha < 4$.
2. (a) La fonction f étant continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-4;4[$. Tout réel $\alpha \in]-4;4[$ admet donc un unique antécédent par f, ce qui revient à dire que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution.

   (b) Pour $\alpha = 2$, l'équation à résoudre est $\dfrac{4(1-e^x)}{1+e^x} = 2$, soit $4 - 4e^x = 2 + 2e^x$, ou encore $2 = 6e^x$, soit $e^x = \dfrac{1}{3}$, et $x = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\ln(3)$.

   (c) Le principe est le même : $4 - 4e^x = \alpha + \alpha e^x$, soit $4 - \alpha = e^x(4+\alpha)$, ou encore $e^x = \dfrac{4-\alpha}{4+\alpha}$. Le membre de droite étant strictement positif quand $\alpha \in]-4;4[$, l'équation admet pour unique solution $x = \ln\left(\dfrac{4-\alpha}{4+\alpha}\right)$.

Partie D

1. Graphiquement, si on trace la droite d'équation $y = -x$ sur le même graphique que la courbe $\mathcal{C}$, il semble y avoir trois point d'intersection, autrement dit trois solutions à l'équation $f(x) = -x$, et donc à l'équation $f(x) + x = 0$. L'une d'elles est la solution évidente 0, les deux autres sont symétriques par rapport à 0.

2. (a) C'est immédiat au vu de la dérivée obtenue pour f dans la partie A.

   (b) Sous la forme précédente, le signe de φ' ne saute pas aux yeux (et le lien avec l'indication de l'énoncé non plus), mettons donc tout au même dénominateur : $\varphi'(x) = \dfrac{(e^x+1)^2 - 8e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 8e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x} - 6e^x + 1}{(e^x+1)^2}$. La dérivée est du signe de son numérateur, qui peut se mettre en posant $X = e^x$ sous la forme $X^2 - 6X + 1$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 36 - 4 = 32$. L'équation $X^2 - 6X + 1$ admet donc deux solutions réelles, $X_1 = \dfrac{6 + \sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$, et $X_2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Le trinome $X^2 - 6X + 1$ est négatif entre ces deux racines, et positif en dehors. Les valeurs de X_1 et X_2 étant toutes deux strictement positives ($2\sqrt{2} = \sqrt{8} < 3 = \sqrt{9}$), $x = \ln(X)$, s'annule également en deux valeurs, $x_1 = \ln(X_1)$ et $x_2 = \ln(X_2)$. La fonction φ est décroissante sur $[x_1; x_2]$, croissante le reste du temps.

   (c) Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

3. (a) On peut constater que $x_1 > 0$ (X_1 étant très manifestement plus grand que 1), et $x_2 < 0$ (c'est moins manifeste, mais en fait $X_2 = \dfrac{1}{X_1} : \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 3 - 2\sqrt{2}$, ce qui implique que $X_2 < 1$). Sur $[0; +\infty[$, la fonction φ est donc décroissante puis croissante, admettant un minimum égal à $\varphi(x_2)$, une limite $+\infty$ en $+\infty$ et vérifiant $\varphi(0) = 0$. La fonction s'annule donc une seule fois sur $]0; +\infty[$, en une valeur plus grande que x_2 (c'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires).

   (b) On peut effectuer le même raisonnement sur l'intervalle $] - \infty; 0[$, ou plus simplement utiliser l'imparité de φ pour prouver qu'elle s'annule également une seule fois sur $] - \infty; 0[$, en une valeur opposée de la précédente. On retrouve bien les trois solutions prévues à la question 1.