Devoir à la Maison n°1

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le mardi 18 septembre

Problème (vieux sujet de bac)

On considère la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{4(1-e^x)}{1+e^x}$, et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique : 1cm).

Partie A

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ puis en $-\infty$, et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Former le tableau des variations de f.
3. Trouver une équation de la tangente (T) a la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse nulle.
4. Démontrer que f est une fonction impaire.
5. Construire $\mathcal{C}$ et (T) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Partie B

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$.
   On donnera le resultat sous forme d'un logarithme népérien d'un quotient.
2. Vérifier que, pour tout reel x, $f(x) = 4 - \dfrac{8e^x}{1+e^x}$.
3. Déduire des questions précédentes l'aire, en cm^2, de la partie de la courbe comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'equations $x = -3$ et $x = 0$. Donner une valeur décimale approchée a 10^{-2} près de cette aire.
4. On considère ici la région du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, la droite (T) et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$. Calculer, en cm^2, l'aire de cette region. Donner une valeur décimale approchée a 10^{-2} près de cette aire.

Partie C

Résolution de l'équation $f(x) = \alpha$ ou α est un nombre réel donné.

1. En utilisant les résultats de la partie A, montrer que, si α n'appartient pas à l'intervalle $]-4; 4[$, l'équation n'a pas de solution.
2. On suppose desormais que $-4 < \alpha < 4$.
   (a) Démontrer qu'il existe une solution et une seule pour cette equation.
   (b) Pour $\alpha = 2$, exprimer cette solution a l'aide d'un logarithme népérien.
   (c) Pour α quelconque appartenant a l'intervalle $]-4; 4[$, exprimer cette solution en fonction de α.

Partie D

On se propose d'étudier l'existence des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) + x = 0$.

1. À partir de la représentation graphique de f, indiquer le nombre de solutions de cette équation.
2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) + x$.
   (a) Vérifier que, pour tout reel x, on a $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{8e^x}{(e^x + 1)^2}$.
   (b) En déduire les variations de φ (on pourra commencer par résoudre l'équation $X^2 - 6X + 1 = 0$).
   (c) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
3. (a) À partir des résultats précédents, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) + x = 0$ appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
   (b) Retrouver ainsi, de manière rigoureuse, les résultats trouvés à la question 1.