Concours Blanc : corrigé de l'épreuve de mathématiques

PTSI A et B Lycée Eiffel

Mardi 4 juin 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

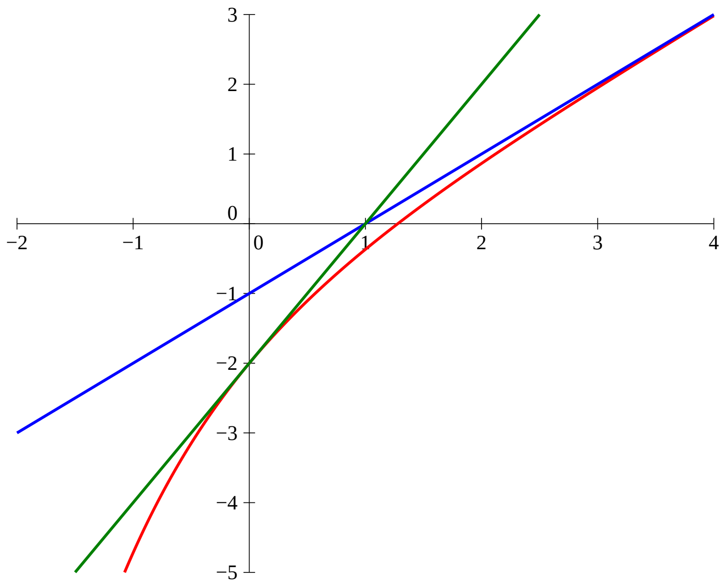
Exercice 1

A. Étude d'une fonction.

1. Comme $f(x)\underset{x\to-\infty}{e}{}^{-x}$, la courbe admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy). En $+\infty$, on peut se contenter d'écrire $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - 1 + o(1)$ (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$) pour conclure que $(D) : y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
2. On commence par écrire $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, puis $f(x) = -2 + 2x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. La tangente (T) a donc pour équation $y = 2x - 2$, et le terme d'ordre 2 étant positif, la courbe sera au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.
3. La fonction est bien sûr dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 1 + e^{-x}$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est strictement croissante. Ce qui donne le tableau de variations absolument passionnant qui suit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$ -2 $\nearrow$	$+\infty$

4. On calcule donc $f''(x) = -e^{-x}$. La dérivée seconde est toujours négative, la fonction est donc concave sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction est continue et, au vu des calculs précédents, la fonction effectue une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent α par f. Comme de plus $f(1) = -e^{-1} < 0$, et $f(2) = 1 - e^{-2} > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule entre 1 et 2, ce qui prouve que $\alpha \in [1, 2]$.
6. Voici une allure (la courbe en rouge, la tangente en vert et l'asymptote en bleu) :



B. Approximation de α à l'aide d'une suite récurrente.

1. En effet, $h(x) = x \Leftrightarrow e^{-x} + 1 = x \Leftrightarrow x - 1 - e^{-x} = 0$, ce qui ne se produit que lorsque $x = \alpha$ d'après les résultats de la première partie.
2. La fonction h est évidemment dérivable, de dérivée $h'(x) = -e^{-x}$. Sur l'intervalle $[1, 2]$, cette dérivée est négative et croissante, minorée par $-e^{-1}$ (et accessoirement majorée par $-e^{-2}$), donc $\forall x \in [1, 2]$, $-\dfrac{1}{e} \leqslant h'(x) \leqslant 0$, ce qui prouve que $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{e}$.
3. On prouve cette propriété par récurrence. C'est certainement vrai au rang 0 puisque $u_0 = 1 \in [1, 2]$, et si on le supposé vérifié au rang n alors $-2 \leqslant -u_n \leqslant -1$, donc $1 + e^{-2} \leqslant 1 + e^{-u_n} \leqslant 1 + e^{-1}$. Vu les valeurs approchées données en début d'exercice, a fortiori $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété, qui est donc vraie pour tout entier naturel n.
4. Il s'agit bien sûr d'appliquer l'inégalité des accroissements finis. La fonction est dérivable sur $[1, 2]$, sa dérivée est majorée en valeur absolue par $\dfrac{1}{e}$, les deux réels u_n et α appartiennent à l'intervalle $[1, 2]$, donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$.

   On prouve la deuxième inégalité par récurrence. Au rang 0, $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1 \simeq 0,3$, et $\dfrac{1}{e} = e^{-1} \simeq 0,4$, donc l'inégalité est vérifiée. Si on la suppose vraie au rang n, il suffit d'appliquer le résultat de la première partie de la question pour en déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$, puisq l'hypothèse de récurrence pour conclure que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{e^n}|u_n - \alpha| = \dfrac{1}{e^{n+1}}|u_n - \alpha|$.
5. Puisque $\dfrac{1}{e} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$. Le théorème des gendarmes assure alors que $|u_n - \alpha|$, qui est toujours positif, tend vers 0. Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$. La distance à la limite est inférieure à 10^{-2} quand $\dfrac{1}{e^n} \leqslant 10^{-2}$, soit $e^n \geqslant 100$, donc $n \geqslant \ln(100)$ (en pratique, $n \geqslant 5$ suffit donc, peut-être même moins pusique notre majoration n'est évidemment pas une égalité).

Exercice 2

1. (a) Pour déterminer le noyau de f, on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 10y & + & 7z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \\ -2x & - & 8y & - & 6z & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations du système sont équivalentes, de plus $L_1 + L_3$ donne $2y + z = 0$, soit $z = -2y$. En reportant dans la première équation, $2x - 4y = 0$, soit $x = 2y$. On trouve donc $\ker(f) = \{(2y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2, 1, -2))$.

   (b) La matrice est inversible si et seulement si l'application f est bijective, ce qui n'est pas le cas puisque le résultat de la question précédente prouve que f n'est pas injective.

2. (a) On chercher donc $v = (x, 1, z)$, tel que $f(v) = u$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 10 & + & 7z & = & 2 \\ x & + & 4 & + & 3z & = & 1 \\ -2x & - & 8 & - & 6z & = & -2 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations sont à nouveau équivalentes, se réduisant à $x = -3z - 3$. On reporte dans la première équation pour trouver $-6z - 6 + 10 + 7z = 2$, soit $z = -2$. Autrement dit, $v = (3, 1, -2)$.

   (b) Même principe qu'à la question précédente, on cherche $w = (x, 1, z)$ tel que $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 10 & + & 7z & = & 3 \\ x & + & 4 & + & 3z & = & 1 \\ -2x & - & 8 & - & 6z & = & -2 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations n'ayant pas changé, on a toujours $x = -3z - 3$, et la première équation devient $-5z - 6 + 10 + 7z = 3$, soit $z = -1$, puis $w = (0, 1, -1)$.

   (c) La famille est constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de prouver qu'elle est libre. On peut le faire à l'aide d'un calcul de rang : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (on a effectué successivement les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$). Cette dernière matrice est de rang 3, c'est donc également le cas de la famille $\mathcal{B}'$, qui constitué une base de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Commençons par écrire la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. On peut l'inverser en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1/2 - 3/2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, cette matrice est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.

(e) Calculons donc $P^2 = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ puis $P^3 = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ -12 & -16 & -5 \end{pmatrix}$, on obtient alors $P^3 - 2P^2 - 2P + I = \begin{pmatrix} 17-14-4+1 & 24-18-6 & 6-6 \\ 4-2-2 & 5-4-2+1 & 2-2 \\ -12+8+4 & -16+12+4 & -5+2+2+1 \end{pmatrix} = 0$.
Puisque $P^3 - 2P^2 - 2P + I = 0$, on peut écrire $I = P(-P^2 + 2P + 2I)$, ce qui prouve d'une part que la matrice P est inversible, et d'autre part que $P^{-1} = -P^2 + 2P + 2I$. Le calcul explicite de $-P^2 + 2P + 2I$ donne évidemment la même matrice que celle obtenue par le pivot de Gauss.

3. (a) Inutile de faire de gros calculs, puisque $f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$, la matrice est $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) C'est une formule du cours : $N = P^{-1}AP$, ou si on préfère $A = PNP^{-1}$. Or, on vérifie facilement que la matrice N est nilpotente d'ordre 3 : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = 0$, et de même pour les puissances suivantes. Or, $A^k = PN^kP^{-1}$ (on le prouve par exemple par récurrence, c'est vrai au rang 1 d'après ce qui précède, et en le supposant au rang n, alors $A^{k+1} = A^k \times A = PN^kP^{-1}PNP^{-1} = PN^{k+1}P^{-1}$. On en déduit la nullité de A^k pour $k \geqslant 3$.

4. (a) Par hypothèse, $g \circ f(u) = f \circ g(u)$. Comme $f(u) = 0$, cela implique $f(g(u)) = 0$, c'est-à-dire $g(u) \in \ker(f)$. D'après le calcul effectué dans la première question du problème, $g(u) \in$

$\mathrm{Vect}(u)$, soit $g(u) = \lambda u$. Ce n'est pas suffisant pour prouver la nullité de $g(u)$, qui n'est en fait pas toujours assurée ! Par exemple, l'application identité commute certainement avec f mais ne vérifie sûrement pas $g(u) = 0$. Hum, une imprécision coupable de l'énoncé.

(b) Le fait que C_N est un sous-espace vectoriel se démontre classiquement : si $AN = NA$ et $BN = NB$, alors quels que soient les réels λ et μ, $(\lambda A + \mu B)N = \lambda AN + \mu BN = \lambda NA + \mu NB = N(\lambda A + \mu B)$. Pour en déterminer une base, le plus simple est de faire un calcul explicite. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $AN = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$ et $NA = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, les deux matrices commutent donc si $d = g = h = 0$; $a = e = i$ et $b = f$. Autrement dit, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + bN + cN^2$, ce qui prouve bien que $C_N = \mathrm{Vect}(I, N, N^2)$.

(c) C'est un simple calcul : $AM = MA$ est équivalent (puisque les matrices sont inversibles) à $P^{-1}AMP = P^{-1}MAP$, soit $P^{-1}APP^{-1}MP = P^{-1}MPP^{-1}AP$. Puisque $N = P^{-1}AP$, on trouve la condition $NP^{-1}MP = P^{-1}MPN$, soit $P^{-1}MP \in C_A$. D'après la question précédente, $P^{-1}MP = \alpha I + \beta N + \gamma N^2$, donc $M = P(\alpha I + \beta N + \gamma N^2)P^{-1} = \alpha I + \beta A + \gamma A^2$, ce qui prouve que $C_A = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$. On connait une famille génératrice de C_A constituée de trois matrices, reste à vérifier qu'elle est libre. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, il est alors facile de prouver que I, A et A^2 forment une famille libre : si $\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0$, alors $\beta = 0$ en regardant par exemple le coefficient en bas à droite de la matrice, puis $\alpha = 0$ en regardant le coefficient en haut à gauche, et alors $\gamma = 0$ puisque la matrice A^2 n'est pas nulle. On conclut que C_A est de dimension 3.

Exercice 3

1. (a) Il n'y a même pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{n}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$, ce qui coïncide avec la valeur imposée pour $f_n(0)$ et prouve donc la continuité à droite de f_n en 0.

   (b) On peut passer directement par le taux d'accroissement : $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-\frac{n}{x}}$. D'après les calculs précédents, ce taux d'accroissement tend vers 0 en 0^+, donc f_n est dérivable à droite en 0, et y admet une demi-tangente horizontale.

2. (a) La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles. On calcule $f_n'(x) = e^{-\frac{n}{x}} + \dfrac{n}{x^2} \times xe^{-\frac{n}{x}} = \left(1 + \dfrac{n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}}$. Sur $]0, +\infty[$, cette dérivée est toujours positive. Elle s'annule pour $x = -n$, est positive également sur $]-\infty, -n]$, et négative sur $[-n, 0[$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 1$, on obtient facilement $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. En 0^-, il faut invoquer la croissance comparée. Si on veut être très rigoureux, on pose $X = -\dfrac{n}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} X = +\infty$, et $f_n(x) = -n\dfrac{e^X}{X}$, qui a pour limite $-\infty$ par croissance comparée.

3. (a) Rappelons donc que $e^u \underset{u \to 0}{=} 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

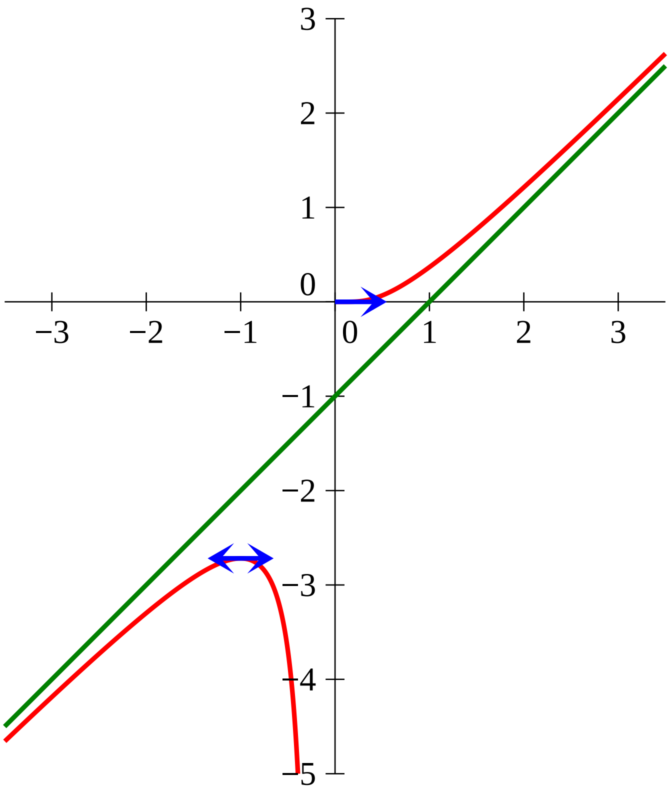
(b) Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 0$, on peut appliquer le développement limité précédent à $u = \dfrac{-n}{x}$ pour obtenir $e^{-\frac{n}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 - \dfrac{n}{x} + \dfrac{n^2}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Il ne reste plus qu'à multiplier le tout par x pour trouver le résultat demandé.

(c) En particulier, $f_n(x) = x - n + o(1)$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - n$ est asymptote oblique à la courbe à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$. Par ailleurs, le terme suivant du développement est du signe de x, donc la courbe sera située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$, et en-dessous au voisinage de $-\infty$.

(d) Récapitulons le tableau de variations de la fonction f_1, en calculant $f_1(-1) = -e^1 = -e$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ || 0	$\nearrow$	$+\infty$

Sur la courbe, on indique bien entendu la demi-tangente en 0 et l'asymptote :



4. (a) Sur $\mathbb{R}^{-*}$, la fonction f_n est toujours strictement négative, donc ne peut pas prendre la valeur 1. Sur $[0, +\infty[$, f_n est continue et strictement croissante, et effectue une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. En particulier, 1 admet un unique antécédent (strictement positif) par f_n.

(b) Il suffit pour cela de calculer $f_n(1) = e^{-n} < 1$. La fonction étant strictement croissante sur $\mathbb{R}+$, $1 < u_n$. Par ailleurs, $u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$ implique, en passant au ln, que $\ln(u_n) - \dfrac{n}{u_n} = 0$, soit $u_n \ln(u_n) = n$.

(c) La fonction g est dérivable sur $[1,+\infty[$, de dérivée $g'(x) = \ln(x)+1 > 0$, elle est donc strictement croissante et bijective. Comme $g(1) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, la fonction g est bijective de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. La fonction g^{-1} est donc définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et vérifie $\lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$. Comme $u_n = g^{-1}(n)$ (c'est une conséquence immédiate des résultats de la question précédente), on peut en effet en déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) On sait déjà que $u_n \ln(u_n) = n$, et les deux membres étant supérieurs ou égaux à 1, on peut prendre le ln des deux côtés pour obtenir $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$. Or, en posant $X = \ln(u_n)$, qui tend vers $+\infty$, on peut affirmer en utilisant la croissance comparée que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$, c'est-à-dire que $\ln(\ln(u_n)) = o(\ln(u_n))$. On en déduit que $\ln(n) = \ln(n) + \ln(\ln(n)) \sim \ln(u_n)$. Attention à ne pas en déduire que u_n est équivalente à n, ce serait faux ! Reprenons plutôt l'égalité $u_n \ln(u_n) = n$. en appliquant l'équivalent qu'on vient d'obtenir, $u_n = \dfrac{n}{\ln(u_n)} \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$.

5. (a) C'est une conséquence directe du fait que $u_n = g^{-1}(n)$ et que la fonction g^{-1} a le même sens de variations que g, donc est croissante.

(b) Par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}}$. On peut alors calculer $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}} - \frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

(c) La fonction f_n est croissante sur $[u_n, u_{n+1}]$, minorée par $f_n(u_n) = 1$ et majorée par $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$, on peut donc encadrer I_n en écrivant $\displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} 1\ dt \leqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\ dt \leqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{\frac{1}{u_{n+1}}}\ dt$. Autrement dit, $u_{n+1} - u_n \leqslant I_n \leqslant e^{\frac{1}{u_{n+1}}}(u_{n+1} - u_n)$. Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, on divise pour obtenir l'encadrement souhaité.

(d) Le membre de droite de l'encadrement précédent a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}} = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1$, soit $I_n \sim u_{n+1} - u_n$.

6. On s'intéresse désormais à la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f_1(t)\ dt = \int_x^{2x} te^{-\frac{1}{t}}\ dt$.

(a) Si $x > 0$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}^{+*}$, intervalle sur lequel la fonction f_1 est strictement positive. Comme $x < 2x$, l'intégrale définissant g est positive. Si $x < 0$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}^{-*}$, intervalle sur lequel la fonction f_1 est négative. Mais comme cette fois-ci $2x < x$, l'intégrale sera tout de même positve. La fonction g est donc positive sur chacun de ses deux intervalles de définition.

(b) C'est une majoration directe : si $t \geqslant \dfrac{1}{\ln(2)}$, $-\ln(2) \leqslant -\dfrac{1}{t} \leqslant 0$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant e^{-\frac{1}{t}}$, la minoration demandée en découle. On peut intégrer l'inégalité entre x et $2x$ pour obtenir $g(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{2}\ dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^{2x} = \frac{3x^2}{4}$. En particulier, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$, la fonction g admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

(c) La fonction f_1 est continue sur $[0, 1]$, donc certainement bornée sur ce même intervalle. Notons m et M les bornes de f_1, on peut alors écrire, si $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} m\ dt \leqslant \int_x^{2x} f_1(t)\ dt \leqslant \int_x^{2x} M\ dt$, soit $mx \leqslant g(x) \leqslant Mx$. En particulier, une application directe du théorème des gendarmes permet de dire que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$.

(d) Par croissance comparée, $\lim_{t \to 0-} -t^3 e^{-\frac{1}{t}} = +\infty$ (encore une fois, si on veut être extrêmement rigoureux, on pose $X = -\dfrac{1}{t}$, et on se ramène au calcul de $\lim_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^3}$). En particulier, il existe certainement un voisinage à gauche de 0 pour lequel $-t^3 e^{-\frac{1}{t}} \geqslant 1$, donc $e^{-\frac{1}{t}} \geqslant -\dfrac{1}{t^3}$ (on a bien divisé par une quantité positive). On peut donc écrire, en multipliant par t et en intégrant entre x et $2x$, que $g(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{-1}{t^2}\, dt = \left[\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x}$. Comme $\lim_{x \to 0^-} -\dfrac{1}{2x} = +\infty$, on en déduit effectivement que $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$.

(e) Si F est une primitive de f_1, on peut simplement écrire $g(x) = F(2x) - F(x)$. La fonction F étant bien sûr dérivable de dérivée f_1, g l'est aussi, et $g'(x) = 2f_1(2x) - f_1(x)$ (sur chacun des deux intervalles de définition).

(f) Reprenons le calcul là où nous l'avons laissé à la question précédente : $g'(x) = 4xe^{-\frac{1}{2x}} - xe^{-\frac{1}{x}} = xe^{-\frac{1}{2x}}(4 - e^{-\frac{1}{2x}})$. La parenthèse s'annule lorsque $e^{-\frac{1}{2x}} = 4$, soit $-\dfrac{1}{2x} = 2\ln(2)$, ou encore $x = -\dfrac{1}{4\ln(2)}$ (valeur qu'on notera x_0). La dérivée dépend par ailleurs du signe de x, ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_0		0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

(g) Avec les informations que l'on a, on peut tracer une allure proche de la courbe suivante :