# Concours Blanc : épreuve de mathématiques

PTSI A et B Lycée Eiffel

Mardi 4 juin 2013

**Durée : 4H. Calculatrices interdites.**

## Exercice 1

### A. Étude d'une fonction.

On considère dans cette partie la fonction $f : x \mapsto x - e^{-x} - 1$ définie sur $\mathbb{R}$. On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On donne pour tous les calculs de l'exercice les valeurs approchées suivantes : $e^{-1} \simeq 0,4$ et $e^{-2} \simeq 0,1$.

1. Étudier les branches infinies de $f$. On prouvera en particulier l'existence d'une asymptote $(D)$ en $+\infty$, donc on précisera l'équation.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $f$ en 0. En déduire une équation de la tangente $(T)$ à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}$ et $(D)$ au voisinage de 0.
3. Étudier les variations de la fonction $f$, et dresser son tableau de variations.
4. Calculer $f''$, et étudier la convexité de la fonction $f$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in [1, 2]$.
6. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en faisant figurer sur le même graphique sa tangente $(T)$ et son aymptote $(D)$. On pourra utiliser $\alpha \simeq 1,3$.

### B. Approximation de $\alpha$ à l'aide d'une suite récurrente.

On considère désormais la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x} + 1$. On définit également la suite $(u_n)$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Montrer que $h$ admet pour unique point fixe le réel $\alpha$ défini dans la première partie.
2. Montrer que, $\forall x \in [1, 2]$, $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{e}$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$.
4. Justifier soigneusement que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$.

   En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e^n}$.
5. En déduire la convergence de la suite $(u_n)$. Déterminer une valeur de $n$ pour laquelle $u_n$ est à une distance inférieure à $10^{-2}$ de sa limite (on ne demande pas une valeur concrète).

## Exercice 2

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note $I$ la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. (a) Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
   (b) La matrice $A$ est-elle inversible ?
2. (a) Déterminer le vecteur $v$ de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.
   (b) Déterminer le vecteur $w$ de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$.
   (c) Montrer que $(u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
   (d) On note $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer l'inverse $P^{-1}$ de la matrice $P$, que représente la matrice $P^{-1}$ ?
   (e) Calculer $P^3 - 2P^2 - 2P + I$, puis retrouver la valeur de $P^{-1}$ en exploitant le résultat obtenu.
3. (a) Écrire la matrice $N$ de $f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.
   (b) Donner la relation liant les matrices $A$, $N$, $P$ et $P^{-1}$, puis en déduire que, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = 0$.
4. On note $C_N$ (respectivement $C_A$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $N$ (respectivement $A$).
   (a) Montrer que si $g$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ commutant avec $f$, alors $g(u) = 0$.
   (b) Montrer que $C_N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \mathrm{Vect}(I, N, N^2)$. On admet que $C_A$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (c) Établir que : $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$. En déduire que $C_A = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$. Quelle est la dimension de $C_A$ ?

## Exercice 3

Dans cet exercice, la lettre $n$ désigne un entier naturel non nul.
On note $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que $f_n$ est continue à droite en 0.
   (b) Montrer que $f_n$ est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de $f_n$.
2. (a) Montrer que $f_n$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x$ non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer les limites de $f_n$ en $+\infty$, $-\infty$ et $0^-$, puis donner le tableau de variations de $f_n$.
3. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $e^u$ lorsque $u$ est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que, lorsque $x$ est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a :
   $f_n(x) = x - n + \dfrac{n^2}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote oblique $D_n$ dont on donnera une équation. Préciser la position relative de $D_n$ et $C_n$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

(d) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$.

4. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera $u_n$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

(b) Vérifier que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $u_n$ est strictement supérieur à 1 et que $u_n$ est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.

(c) Montrer que la fonction $g : x \mapsto x\ln(x)$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer. En déduire, en utilisant la fonction $g^{-1}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. En déduire un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$.

5. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

(b) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

(c) On pose $I_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\, dt$. Montrer que : $1 \leqslant \dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leqslant e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

(d) En déduire un équivalent de $I_n$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$.

6. On s'intéresse désormais à la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f_1(t)\, dt = \int_x^{2x} te^{-\frac{1}{t}}\, dt$.

(a) Déterminer le signe de $g$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que, $\forall t \geqslant \dfrac{1}{\ln(2)}$, $te^{-\frac{1}{t}} \geqslant \dfrac{t}{2}$, en déduire une fonction simple minorant $g$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\ln(2)}, +\infty\right[$, et déterminer en particulier la branche infinie de $g$ au voisinage de $+\infty$. On admet qu'en $-\infty$, la branche infinie sera du même type que celle obtenue en $+\infty$.

(c) En utilisant les résultats de début d'exercice, montrer que $f_1$ est bornée sur $[0, 1]$, et en déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

(d) Montrer qu'il existe un réel $c < 0$ tel que, $\forall t \in [c, 0[$, $e^{-\frac{1}{t}} \geqslant -\dfrac{1}{t^3}$, et en déduire que $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$.

(e) En notant $F$ une primitive de $f_1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, exprimer $g$ en fonction de $F$. En déduire que $g$ est dérivable sur chacun de ces deux intervalles, et calculer sa dérivée.

(f) Étudier les variations de la fonction $g$ et dresser son tableau de variations.

(g) Donner une allure de la courbe représentative de la fonction $g$ (on donne $g(1) \simeq 0,78$ et $g\left(-\dfrac{1}{4\ln(2)}\right) \simeq 1,33$).