Suites classiques

ECE3 Lycée Carnot

7 octobre 2011

Le premier grand thème à notre programme cette année, ce sont les suites. Pour ce premier chapitre qui leur sera consacré (il y en aura seulement deux), nous allons revenir sur des notions que vous avez déjà vues, en élargissant un peu le champ des suites classiques à connaitre. Vous avez vu au lycée les suites arithmétiques et géométriques (nous rappellerons les principaux résultats les concernant), nous en rajouterons deux autres types.

1 Généralités sur les suites

Définition 1. Une **suite réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une liste infinie de nombres réels, habituellement numérotés à partir de 0. Ainsi, on note u_0 le premier terme de la suite, u_1 le deuxième etc. Le nombre u_n (pour n fixé) est appelé **terme d'indice** n de la suite, et u_n (n n'étant pas fixé) est appelé **terme général** de la suite (attention à ne pas confondre notamment u_n et (u_n)).

Remarque 1. Une autre façon de voir les choses est de dire qu'une suite (u_n) est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, où on choisit de noter l'image de l'entier n u_n plutôt que $u(n)$.

On peut définir une suite réelle de bien des façons, les plus fréquentes étant les suivantes :

- par la liste de ses éléments, par exemple $u_0 = 2$; $u_1 = 4$; $u_2 = 6$; $u_3 = 8$; $u_4 = 10$ etc. C'est la méthode la plus naturelle, mais elle trouve très vite ses limites puisqu'il faut que la suite soit suffisamment simple pour qu'on devine tous les termes à partir des premiers.
- par une formule explicite pour le terme général, par exemple $u_n = n^2 - 4n + 1$. C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle qu'on cherchera à obtenir le plus souvent.
- un cas très fréquent est le cas de la définition par récurrence. Elle consiste à donner une relation de récurrence entre les termes de la suite, c'est-à-dire à exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, et à préciser la valeur de u_0 (sinon, c'est comme pour une récurrence non initialisée, ça ne sert à rien). Par exemple, $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5$. C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite. Il peut arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faut préciser les valeurs de u_0 et u_1, voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare !).
- de façon implicite, par exemple u_n est l'unique réel positif vérifiant $e^{u_n} - u_n - 2 = n$ (croyez-moi sur parole, il y en a un et un seul pour chaque valeur de n). Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs, mais on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite. Dans ce cas, on arrive quand même à s'en sortir à l'aide d'études de fonctions, nous reverrons donc ce genre de suites plus tard dans l'année.

Définition 2. Une suite réelle (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$; je vous fais grâce des définitions de croissance et décroissance stricte). Une suite réelle est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

Exemple : Une technique classique pour étudier le sens de variation d'une suite est de calculer $u_{n+1} - u_n$ et de déterminer son signe. Prenons la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 2$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2 > 0$, donc la suite est strictement croissante.
Dans le cas d'une suite à termes strictement positifs, on peut également calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et déterminer si ce quotient est supérieur ou inférieur à 1.

Définition 3. Une suite (u_n) est **majorée** (resp. **minorée**) par un réel m si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant m$ (resp. $u_n \geqslant m$). Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple : On est souvent amenés à effectuer des récurrences pour prouver des propriétés de croissance, majoration, etc. sur les suites. On a d'ailleurs vu un tel exemple lors de notre chapitre précédent, comme première illustration du principe de récurrence.

Définition 4. On appelle **somme partielle d'indice** n de la suite (u_n) la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Cette notion trouvera toute son importance dans le chapitre ultérieur consacré aux séries, mais nous allons commencer à calculer de telles sommes dans la deuxième partie de ce chapitre.

2 Quelques suites à connaitre

2.1 Suites arithmétiques

Définition 5. Une suite réelle (u_n) est appelée **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ si elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 1. Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 + nr$.
- variations : si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $r < 0$, elle est strictement décroissante.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 + nr$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 + 0 \times r$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Cela découle de façon immédiate de la constatation que $u_{n+1} - u_n = r$.
- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + kr = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + r \sum_{k=0}^{k=n} k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0 + nr))(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_0 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$. On a réutilisé pour ce calcul une des sommes classiques calculées au chapitre précédent.

□

Exemple : Dans la bonne ville de Glourz, l'abonnement annuel aux transports en commun coutait 200 zlourks en l'an 2 000, mais augmente de 6,5 zlourks chaque année. Si on note u_n la valeur de l'abonnement annuel à l'année $2\ 000 + n$, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 6,5$ et de premier terme $u_0 = 200$. Ainsi, le tarif de l'abonnement pour 2 010 sera de $u_{10} = 200 + 10 \times 6,5 = 265$ zlourks. Un habitant ayant vécu à Glourz entre 2 000 et 2 010 inclus (soit 11 années au total) et ayant pris son abonnement tous les ans aura payé au total $\sum_{k=0}^{k=10} u_k = \frac{11(u_0 + u_{10})}{2} = \frac{11(200 + 265)}{2} = 2\ 557,5$ zlourks.

2.2 Suites géométriques

Définition 6. Une suite réelle (u_n) est appelée **suite géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ si elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 2. Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- variations : si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, elle est strictement décroissante (si $u_0 < 0$, c'est le contraire). Si $q < 0$, les termes de la suite sont de signe alterné.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 \times q^n$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 \times q^0$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n \times q = u_0 \times q^n \times q = u_0 \times q^{n+1}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 q^n (q - 1)$. Toues les résultats concernant le sens de variation en découlent.
- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 \times q^k = u_0 \sum_{k=0}^{k=n} q^k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. On a réutilisé pour ce calcul une des sommes classiques calculées au chapitre précédent.

□

Exemple : Dans la bonne ville de Schmurz, l'abonnement annuel aux transports en commun coutait 200 zlourks en l'an 2 000, mais augmente de 3% chaque année. Si on note u_n la valeur de l'abonnement annuel à l'année $2\ 000 + n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $u_0 = 200$ (en effet, $u_{n+1} = u_n + \frac{3u_n}{100} = u_n \times (1 + 0,03)$). Ainsi, le tarif de l'abonnement pour 2 010 sera de $u_{10} = 200 \times 1,03^{10} \simeq 268,8$ zlourks. Un habitant ayant vécu à Glourz entre 2 000 et 2 010 inclus (soit 11 années au total) et ayant pris son abonnement tous les ans aura payé au total $\sum_{k=0}^{k=10} u_k = 200 \frac{1 - 1,03^{11}}{1 - 1,03} \simeq 2\ 561,6$ zlourks.

2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 7. Une suite réelle (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a \notin \{0 : 1\}$ et $b \neq 0$ tels qu'elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Théorème 1. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, alors, en notant α l'unique solution de l'équation $x = ax + b$ (aussi appelée **équation de point fixe** de la suite), la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

Démonstration. L'existence et l'unicité du réel α découlent du fait qu'on a imposé $a \neq 1$ dans la définition d'une suite arithmético-géométrique. Remarquons ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n - a\alpha = a(u_n - \alpha) = av_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison a. $\square$

Remarque 2. On déduit du théorème précédent que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \alpha = v_0 \times a^n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$, ce qui donne une expression explicite du terme de u_n. En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

- calcul du point fixe α.
- définition de la suite (v_n).
- vérification que (v_n) est suite géométrique.
- conclusion : expression du terme général u_n.

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$. L'équation de point fixe de la suite est $x = 3x - 4$, qui a pour unique solution $x = 2$, on pose donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. On remarque que $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^{n+1}$, donc $u_n = v_n + 2 = 3^{n+1} + 2$.

Si on le souhaite, on peut aisément calculer les sommes partielles de la suite (u_n) :
$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} + n + 1 = 2^{n+1} + n.$

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 8. Une suite réelle est dite **récurrente linéaire d'ordre** 2 si elle vérifie une relation de récurrence double linéaire à coefficients constants, c'est-à-dire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux réels non nuls.

Définition 9. Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** de la suite l'équation du second degré $r^2 - ar - b = 0$.

Théorème 2. Si l'équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (u_n) admet deux racines réelles distinctes r et s, le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$, α et β étant deux réels pouvant être déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.
Si l'équation caractéristique admet une racine réelle double r, alors $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$ (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$).
Si l'équation caractéristique n'a pas de racine réelle, on ne peut malheureusement rien dire d'intéressant à notre niveau.

Démonstration. Constatons que, si r et s sont racines de l'équation caractéristique, toutes les suites de la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$ vérifient la récurrence linéaire : en effet, $r^2 = ar + b \Rightarrow r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ (et de même pour s^{n+2}), donc $u_{n+2} = \alpha r^{n+2} + \beta s^{n+2} = \alpha(ar^{n+1} + br^n) + \beta(as^{n+1} + bs^n) = au_{n+1} + bu_n$. Comme de plus la suite u_n est complètement déterminée par ses deux premiers termes et la relation de récurrence double, une suite vérifiant cette même relation de récurrence et ayant les deux mêmes premiers termes que (u_n) est égale à celle-ci.

Le principe est le même dans le deuxième cas : $u_{n+2} = (\alpha + \beta(n+2))r^{n+2} = (\alpha + \beta n + 2\beta)(ar^{n+1} + br^n) = \alpha ar^{n+1} + \alpha br^n + \beta nar^{n+1} + \beta nbr^n + 2\beta ar^{n+1} + 2\beta br^n = a(\alpha r^{n+1} + \beta nr^{n+1} + \beta r^{n+1}) + b(\alpha r^n + n\beta r^n) + a\beta r^{n+1} + 2b\beta r^n = au_{n+1} + bu_n + \beta r^n(ar + 2b)$. Or, l'équation caractéristique admettant une racine double, on a nécessairement $r = \dfrac{a}{2}$ (attention, ici, a et b ne sont pas les notations utilisées habituellement dans la résulution d'équations du second degré) et $x^2 - ax - b = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2$, donc en développant, $b = -\dfrac{a^2}{4}$. Revenons à notre calcul : on a $ar + 2b = a \times \dfrac{a}{2} + 2 \times \dfrac{-a^2}{4} = 0$. Il ne reste plus que la relation de récurrence souhaitée, ce qui achève la preuve dans ce cas.
Le point délicat de toute cette démonstration, que nous allons subtilement esquiver, est en fait d'arriver à prouver qu'il existe toujours une suite du type donné ayant les deux mêmes premiers

termes que u_n. Nous nous contenterons pour l'instant d'admettre (et de constater sur des exemples) que c'est bien le cas, et qu'on ne peut pas en général se contenter d'une forme plus simple (par exemple avec une seule des deux racines dans le premier cas). $\square$

Exemple : Prenons la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Son équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et donc deux racines réelles $r = \dfrac{5+1}{2} = 3$ et $s = \dfrac{5-1}{2} = 2$. D'après le théorème précédent, on peut donc affirmer que $u_n = 3^n\alpha + 2^n\beta$. Les valeurs de u_0 et u_1 donnent respectivement $3^0\alpha + 2^0\beta = \alpha + \beta = 0$, et $3\alpha + 2\beta = 1$, dont on déduit $\beta = -\alpha$, puis $\alpha = 1$, donc $\beta = -1$. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

Encore une fois, le calcul éventuel de sommes partielles ne pose guère de problème puisque la suite est une somme de deux suites géométriques.

Exemple 2 : suite de Fibonacci. Il s'agit de la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 = x+1$, soit $x^2 - x - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, et qui admet donc deux solutions $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (plus connu sous le petit nom de nombre d'or), et $s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit comme précédemment que $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$. Comme $u_0 = u_1 = 1$, on obtient les équations $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$. Procédons par substitution pour résoudre le système : on a $\beta = 1 - \alpha$, donc en remplaçant dans la deuxième équation $\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \alpha\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$, soit encore en regroupant et mettant tout au même dénominateur $\alpha\sqrt{5} = 1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Autrement dit, $^\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. On obtient ensuite $\beta = 1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$. Il n'est pas le moins du monde évident que ces formules vont donner des valeurs entières pour tous les termes de la suite, et pourtant c'est bien le cas !