Exercices supplémentaires sur les études de fonctions

ECE3 Lycée Carnot

26 janvier 2012

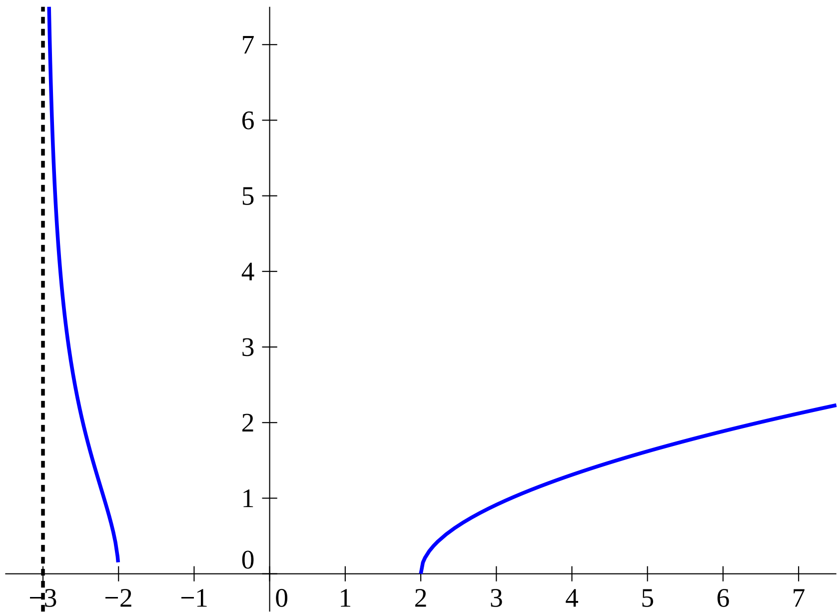
Étude de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+3}}$

- Le domaine de définition de f s'obtient en résolvant l'inéquation $\dfrac{x^2-4}{x+3}$ (la valeur interdite du dénominateur sera prise en compte dans cette résolution), ce qui conduit à faire le tableau de signes suivant :

x		-3		-2		2	
x^2-4	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{x^2-4}{x+3}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

  On peut en conclure que $\mathcal{D}_f =]-3;-2] \cup [2;+\infty[$.
- Aucune étude de signe nécessaire pour la fonction f, qui sera nécessairement positive sur son domaine de définition, on peut donc passer immédiatement aux limites et branches infinies. Pas de limite en -2 et 2 où la fonction est définie et a pour image 0. Par contre, $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x^2-4}{x+3} = +\infty$ (le numérateur tend vers 5 et le dénominateur, au vu du tableau de signe effectué plus haut, vers 0^+ ; il serait de toute façon impossible d'appliquer une racine carrée à quelque chose qui tend vers $-\infty$), donc $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$. Il y a une asymptote verticale d'équation $x = -3$.
  En $+\infty$, on peut travailler avec des équivalents, qui se composent très bien avec toutes les puissances, en particulier les racines carrées : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{x^2}{x}} \sim \sqrt{x}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; puis en divisant simplement l'équivalent (je rappelle tout de même qu'il est très contre-productif et inutile de refaire tout le calcul) $\dfrac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, et la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).
- Reste l'étude des variations. Pour anticiper un peu sur ce que nous reverrons dans le chapitre consacré à la dérivation, on peut constater que f ne sera pas dérivable sur tout son ensemble de définition, mais seulement sur $]-3;-2[\cup]2;+\infty[$, et que f' admet des limites infinies en 2 et -2, ce qui signifie que la courbe aura des tangentes verticales en ces points. Le reste du temps, f étant de la forme $\sqrt{u}$, on aura $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, le dénominateur de cette fraction étant toujours positif. Contentons-nous donc d'étudier le signe de $u'(x) = \dfrac{2x(x+3)-(x^2-4)}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}$. La dérivée de f est donc du signe du trinôme x^2+6x+4, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 16 = 20$, et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{20}}{2} = -3-\sqrt{5}$, et $x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{20}}{2} = -3+\sqrt{5}$. La premier racine x_1 n'appartient pas à $\mathcal{D}_{\{}$, elle se situe avant -3. Quant à la deuxième, elle n'est pas non plus dans $\mathcal{D}_f$ car comprise entre -2 et 2. Tout l'intervalle $]-3;-2]$ est donc compris entre les deux racines, la dérivée y sera négative et la fonction décroissante. Au contraire, la dérivée est toujours positive sur $[2;+\infty[$, la fonction f y est donc croissante.

- Pour terminer, bien évidemment, un courbe soignée tenant compte de tous les calculs effectués :



Étude de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 + 2x}$

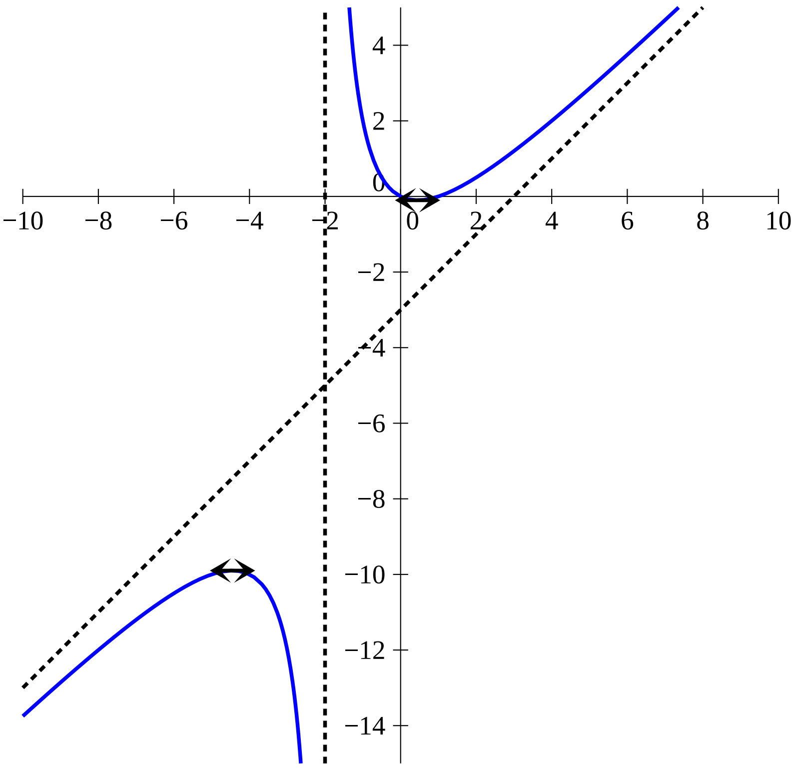
- Domaine de définition aisé à calculer ici, le dénominateur se factorise en $x(x+2)$, donc s'annule en 0 et -2 et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{-2; 0\}$.
- On peut ensuite constater que $g(x) = \dfrac{x(x^2 - x)}{x(x+2)} = \dfrac{x^2 - x}{x+2}$, mais il est nettement préférable de le faire après le calcul du domaine de définition, car la simplification n'est pas valable pour $x = 0$ et pourrait nous faire oublier une valeur interdite (en effet, dans la deuxième formulation, 0 n'est plus du tout une valeur interdite). En fait, tout cela prouve que la fonction g est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ en posant $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+2}$ (en particulier $g(0) = 0$). Il n'y a donc évidemment pas d'asymptote verticale en 0. En -2, par contre, on a $\lim\limits_{x \to -2} x^2 - x = 4 + 2 = 6$, donc $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - x}{x+2} = -\infty$ et de même $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = +\infty$. Il y a une asymptote verticale d'équation $x = -2$.
  Du côté des infinis, on peut appliquer les méthodes classiques à base d'équivalents (et utiliser la forme simplifiée de g, il n'y aucune raison de se compliquer la vie) : $g(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x} \sim x$, donc $\underset{x \to \pm\infty}{g}(x) = \pm\infty$; puis $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$; et enfin $g(x) - x = \dfrac{x^2 - x}{x+2} - x = \dfrac{-3x}{x+2} \underset{\pm\infty}{\sim} -3$. Conclusion : on a une asymptote oblique d'équation $y = x - 3$ des deux côtés.
- Un petit détour par l'étude du signe de g, qui résulte d'un simple petit tableau en utilisant la forme $g(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+2}$:

x		-2		0		1	
$x(x-1)$	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$g(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

- Reste l'étude un peu laborieuse des variations. La fonction est évidemment dérivable sur son ensemble de définition, et $g'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+2)-(x^2-x)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x-2}{(x+2)^2}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, dont le discriminant vaut $\Delta = 16+8 = 24$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{24}}{2} = -2-\sqrt{6}$, et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{24}}{2} = -2+\sqrt{6}$. On peut constater que x_1 se trouve avant l'asymptote verticale, et que x_2 est très légèrement positive (et plus petite que 1). Comme on est courageux on calcule $f(x_1) = \dfrac{(-2-\sqrt{6})^2+2+\sqrt{6}}{-2-\sqrt{6}+2} = \dfrac{12+5\sqrt{6}}{-\sqrt{6}} = -5-2\sqrt{6}$. De même, on obtient $f(x_2) = 2\sqrt{6}-5$. Soit le tableau de variations final suivant :

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{6}$	-2	0	$-2+\sqrt{6}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-5-2\sqrt{6}$ ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	0 ↘	$2\sqrt{6}-5$ ↗	0 ↗	$+\infty$

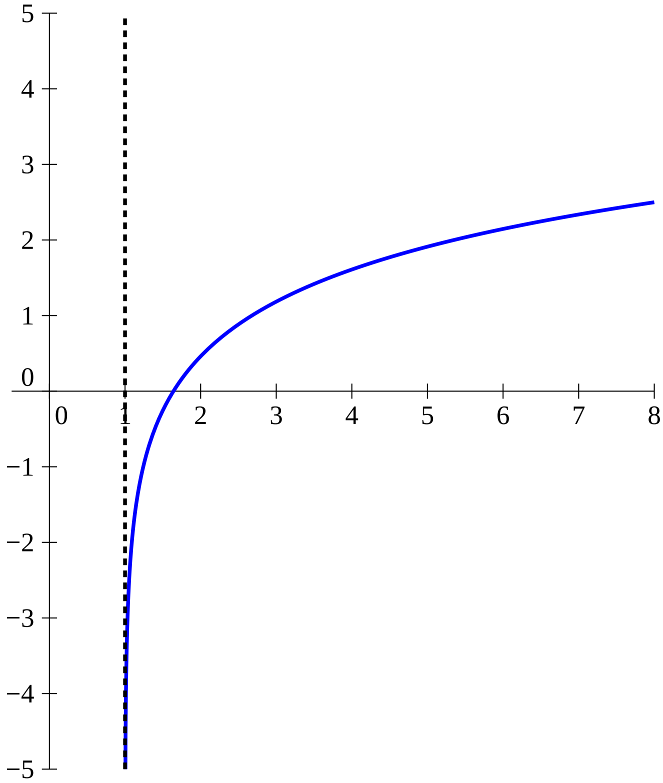
- Et bien sûr la courbe qui va avec :



Étude de la fonction $h : x \mapsto \ln(2x-\sqrt{x}-1)$

- La fonction est définie si $2x-\sqrt{x}-1 > 0$. Cela suppose déjà que $x \geqslant 0$ pour que l'utilisation de la racine carrée ait un sens. Posons alors $X = \sqrt{x}$, on cherche donc le signe de $2X^2-X-1$, qui est un trinôme de discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et qui admet donc deux racines $X_1 = \dfrac{1+3}{4} = 1$, et $X_2 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Le trinôme est donc négatif ou nul si $-\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant 1$, ce qui correspond à $0 \leqslant x \leqslant 1$. Finalement, $\mathcal{D}_h =]1; +\infty[$.

- Le signe de f est obtenu par le même genre de calculs que le domaine de définition. La fonction est positive si $2x - \sqrt{x} - 1 \geqslant 1$ (par passage à l'exponentielle de l'inégalité $h(x) \geqslant 0$), soit en faisant le même changement de variable $2X^2 - X - 2 \geqslant 0$. ce nouveau trinôme a pour discriminant $\Delta = 1 + 16 = 17$, et admet donc deux racines $X_3 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ (c'est négatif, ça ne va pas beaucoup nous intéresser), et $X_4 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$. La fonction est donc positive si $x \geqslant \left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^2 = \dfrac{9+\sqrt{17}}{8}$ (pour les curieux, ça vaut environ $1,64$).
- Sans difficulté, on a $\lim\limits_{x\to 1} 2x - \sqrt{x} - 1 = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = -\infty$, il y aura une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Du côté de $+\infty$, on obtient aussi sans grande difficulté que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, mais le quotient par x oblige à effectuer une petite factorisation : $f(x) = \ln\left(x\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}\right)\right)$, donc $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}}{x}$. Le premier terme a une limite nulle par croissance comparée, et le deuxième tend également vers 0 (son numérateur ayant pour limite $\ln 2$), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, il y aura une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.
- Pour les variations, on peut se simplifier la vie comme pour la fonction f : h est de la forme $\ln(u)$, avec u strictement positive sur le domaine de définition de h, donc la dérivée $h' = \dfrac{u'}{u}$ est simplement du signe de $u'(x) = 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$. Comme on a toujours $x > 1$, donc $\sqrt{x} \geqslant 1$, sur notre ensemble de définition, la fonction y est toujours croissante.
- Une courbe assez simple pour cette fois :

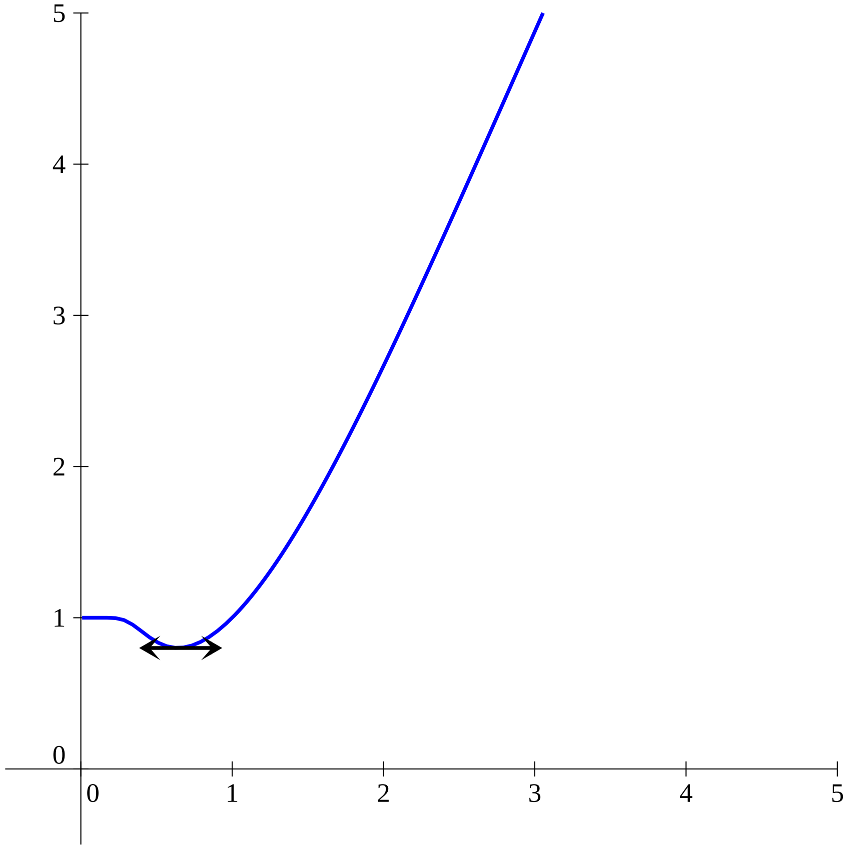


Étude de la fonction $i : x \mapsto x^{x^{\frac{1}{x}}}$

- Pour que la fonction soit définie, il faut que toutes les bases et autres exposants des différentes puissances (qui sont variables) soient strictement positifs, ce qui revient à demander $x > 0$. On a donc $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}_+^*$.
- La fonction i sera bien sûr positive partout où elle est définie.
- Pour simplifier les calculs, posons $j(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, de telle sorte qu'on a $i(x) = x^{j(x)} = e^{j(x)\ln(x)}$. Lorsque x tend vers 0, $\frac{1}{x}$ a pour limite $+\infty$ et $\ln(x)$ tend vers $-\infty$, donc en prenant l'exponentielle du produit, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} j(x) = 0$. Par ailleurs, au vu du calcul effectué, $j(x)$ est certainement négligeable par rapport à $e^{\ln x} = x$. Comme on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, on a a fortiori $\lim\limits_{x\to 0} xj(x) = 0$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} i(x) = 1$. Il n'y a donc pas d'asymptote verticale en 0, mais un possible prolongement par continuité en posant $i(0) = 1$.
  Du côté de $+\infty$, on a par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x) = e^0 = 1$, dont on déduit facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = +\infty$. Constatons ensuite que $\frac{i(x)}{x} = \frac{e^{j(x)\ln x}}{e^{\ln x}} = e^{\ln(x)(j(x)-1)}$. Or, $j(x) - 1 = e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1$, avec, comme on l'a vu, $\frac{\ln(x)}{x}$ qui tend vers 0. On peut donc appliquer l'équivalent classique de $e^{truc} - 1$ en 0 : $j(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}$, donc $\ln(x)(j(x) - 1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln(x))^2}{x}$, ce qui tend vers 0 par croissance comparée. Il ne reste plus qu'à composer par

l'exponentielle pour obtenir $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{i(x)}{x} = 1$. Du coup, il faut encore faire un dernier calcul : $i(x) - x = x^{j(x)} - x = x(x^{j(x)-1} - 1) = x(e^{(j(x)-1)\ln(x)} - 1)$. On l'a déjà vu, $(j(x)-1)\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$. En particulier, il tend vers 0, et on peut du coup réappliquer l'équivalent $e^{truc} - 1$ à la grosse parenthèse de $i(x) - x$, pour obtenir $i(x) - x \underset{+\infty}{\sim} x \times \dfrac{(\ln x)^2}{x} \sim (\ln x)^2$. Ouf ! On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) - x = +\infty$, et il y a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

- Comme je sens que vous avez aimé les calculs précédents, essayons de nous attacher au point de plus délicat de l'étude : les variations de i. Commençons déjà par constater que ce sont les mêmes que celles de $\ln i(x) = j(x)\ln(x)$ puisque l'exponentielle est une fonction croissante. dérivons donc : $(\ln i(x))' = j'(x)\ln(x) + \dfrac{j(x)}{x} = \left(-\dfrac{1}{x^2}\ln(x) + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x}\right) j(x)\ln(x) + \dfrac{j(x)}{x} = \dfrac{j(x)}{x}\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{x} + \dfrac{\ln x}{x} + 1\right) = \dfrac{j(x)}{x^2}(x + \ln(x) - (\ln(x))^2)$. La dérivée de i a donc que le même signe que la fonction $k ; x \mapsto x + \ln(x) - (\ln(x))^2$. Le signe de cette fonction n'est hélas pas évident, et il va falloir dériver deux fois pour s'en sortir : $k'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$, dont on ne sait toujours pas obtenir le signe ; puis $k''(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^2}\ln(x) - \dfrac{2}{x} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2}(2\ln(x) - 3)$. La fonction k'' est donc négative jusqu'à $x = e^{\frac{3}{2}}$ (la valeur d'annulation de $2\ln(x) - 3$), et positive ensuite. Autrement dit, k' admet un minimum en $e^{\frac{3}{2}}$, de valeur $k'(e^{\frac{3}{2}}) = 1 + e^{-\frac{3}{2}} - 2e^{-\frac{3}{2}} \times \dfrac{3}{2} = 1 - 2e^{-\frac{3}{2}}$, qui, coup de pot, est un nombre strictement positif. Du coup, k est une fonction strictement croissante. Comme par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} k(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$ (par croissance comparée), les fonctions k et i' changeront de signe exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$. Quand, me direz-vous ? Eh bien, hélas, c'est fort frustrant, mais nous n'avons aucune façon de faire un calcul exact. Si on y tient vraiment, on peut calculer une valeur approchée à l'aide d'une dichotomie. On se contentera d'admettre qu'elle vaut environ $0,64$, comme on le voit sur la courbe qui suit :


5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5