Séries

ECE3 Lycée Carnot

7 décembre 2011

Introduction

Revenons pour introduire ce chapitre quelques siècles en arrière, au temps de Zénon d'Élée, philosophe grec du cinquième siècle avant J-C. Celui-ci est resté célèbre par sa position très sceptique vis-à-vis de certaines théories scientifiques développées à l'époque (notamment par Platon) concernant la divisibilité du temps et des mouvements, et les quelques paradoxes qu'il nous a laissés à méditer à ce sujet. Le plus connu d'entre eux est peut-être celui de la course entre Achille et la tortue. Pour fixer les idées, supposons qu'Achille courre à 10 mètres par seconde (à peu de choses près la vitesse d'un record du monde de 100 mètres), et la tortue (un peu génétiquement modifiée) à 1 mètre par seconde. Achille s'élance avec cent mètres de retard. Quand va-t-il rejoindre la tortue ? La réponse un peu surprenante de Zénon est : « jamais ». Voici son raisonnement : le temps qu'Achille parcoure ses cent mètres, la tortue en a franchi dix. Mais le temps qu'Achille parcourre ces dix nouveaux mètres, la tortue en a fait un de plus etc. On aura beau multiplier les étapes, Achille sera toujours derrière. Comment résoudre le paradoxe ? Regardons les choses d'un point de vue temporel : Achille met 10 secondes pour franchir les cent premiers mètres, puis une seconde supplémentaire pour les dix mètres suivants, $\frac{1}{10}$ seconde pour le mètre suivant etc. Au total, Achille met donc $10 + 1 + \frac{1}{10} + \dots$ secondes avant de rejoindre la tortue. L'astuce est toute simple : cette somme, bien que composée d'un nombre infini de réels, est finie. Ainsi, même s'il faut un nombre infini d'étapes à Achille pour rejoindre la tortue, celles-ci vont toutes se dérouler dans un laps de temps fini. C'est là l'idée d'une série (convergente) en mathématiques : une somme d'un nombre infini de termes qui donne pourtant un résultat fini.

1 Définitions

Définition 1. Soit (u_n) une suite réelle. La **série de terme général** u_n est la suite S_n des sommes partielles de la suite (u_n). Autrement dit, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On note cette série $\sum u_n$.

Remarque 1. On peut construire des séries à partir de suites qui ne sont pas définies à partir de $n = 0$. Dans ce cas, on changera naturellement la valeur de départ dans la somme : si (u_n) est définie pour $n \geqslant n_0$, on pose $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (pour $n \geqslant 1$) est définie par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$. Attention à ne pas confondre u_n et S_n : les premiers termes de la suite (u_n) sont $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{9}$. Ceux de la série (S_n) sont $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$.

Définition 2. La série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite (S_n) a une limite finie. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) est appelée **somme de la série**, et notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Dans le cas contraire, la série est dite divergente. Déterminer la nature d'une série revient à déterminer si elle est convergente.

Remarque 2. **Attention**, la convergence de la suite (u_n) et celle de la série $\sum u_n$ ne sont pas du tout la même chose ! La convergence d'une série revient à celle des sommes partielles de la suite (u_n). Il faut par ailleurs faire très attention à la manipulation des sommes infinies. On ne peut utiliser cette notation qu'à partir du moment où on sait que la série converge, et on ne peut pas manipuler ces sommes aussi aisément que des sommes finies. Dans tous les cas, il est indispensable de s'assurer de la convergence d'une série avant d'utiliser ces sommes, c'est pourquoi on commence toujours, lors de l'étude d'une série inconnue, par étudier les sommes partielles, puis passer à la limite.

Exemple : Reprenons l'exemple de l'introduction. Si on pose $u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, on se rend compte que le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue peut s'exprimer comme la somme de la série $\sum u_n$. Vérifions sa convergence : on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{n-1}}$. C'est une somme géométrique, que l'on sait calculer : $S_n = \frac{10 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a bien convergence de S_n vers $\frac{10}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$. On en déduit la convergence de la série, dont la somme vaut $\frac{100}{9}$ (ce qui représente le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue).

Exemple : Il peut arriver qu'on puisse démontrer la convergence d'une série sans pour autant savoir calculer sa somme. Ainsi la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (définie pour $n \geqslant 1$), qui a fait l'objet d'un exercice faisant intervenir des suites adjacentes il y a quelques semaines, est convergente, mais on ne dispose pas de moyen simple de déterminer sa somme, qui vaut en l'occurence $\frac{\pi^2}{6}$.

Exemple : Un petit dernier avec alternance de signes dans le terme général : $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (pour $n \geqslant 1$). Plutôt que d'étudier directement S_n, on va séparer l'étude des termes d'indices pairs et impairs. La suite (S_{2n}) des termes d'indices pairs est croissante puisque $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$. De même on montre facilement que la suite (S_{2n+1}) des termes impairs est décroissante. Comme de plus, leur différence $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$ tend vers 0, les deux suites sont adjacentes, et convergent donc vers une limite commute, qui est également limite de la suite (S_n). On peut montrer par d'autres méthodes que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\ln 2}{2}$.

Définition 3. Si la série $\sum u_n$ converge, le **reste d'indice** n de la série est le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$.

Proposition 1. Sous les hypothèses précédentes, la suite (R_n) converge vers 0.

Démonstration. En effet, comme les sommes partielles convergent vers la somme de la série, l'écart entre les deux tend vers 0. □

Définition 4. La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 2. Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Pas pour l'instant ! Vous reverrez en deuxième année des critères de convergence permettant de démontrer cette propriété. □

Remarque 3. Attention, la réciproque n'est pas vraie. Par exemple la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, dont on a vu qu'elle était convergente, n'est pas absolument convergente (cf dernière partie du cours, divergence de la série harmonique). On dit que c'est une série semi-convergente.

2 Propriétés

Proposition 3. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors le terme général u_n converge vers 0.

Démonstration. En effet, si la série converge, S_n converge vers la somme S de la série. Mais alors, S_{n+1} tend aussi vers S. Or, on a $u_n = S_{n+1} - S_n$, qui converge donc vers 0. □

Remarque 4. Attention, cette condition est nécessaire mais **pas** suffisante. Encore une fois, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, et pourtant, la limite de $\frac{1}{n}$ vaut bien 0.
Exemple : Ce critère s'utilise surtout via sa contraposée : si le terme général ne tend pas vers 0, alors la série est divergente. Par exemple, la série de terme général $(-1)^n$ ne converge pas.

Proposition 4. Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors leur somme $\sum (u_n + v_n)$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k)$. De même, si λ est un réel quelconque, $\sum \lambda u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration. C'est une application directe des propriétés de la limite. Montrons par exemple la première partie. Notons S_n, T_n et U_n les sommes partielles respectives des séries de terme général u_n, v_n et $u_n + v_n$. On a manifestement $U_n = S_n + T_n$. Si les deux suites S_n et T_n convergent, ce sera donc aussi le cas de U_n et sa limite est bien la somme des limites de S_n et de T_n. □

Remarque 5. Attention encore une fois à la rédaction : ce n'est pas parce qu'une série est convergente et qu'on peut découper la somme en deux morceaux que les deux morceaux en question forment également des séries convergentes. Il est donc préférable encore une fois de ne travailler dans un premier temps qu'avec des sommes partielles.

Proposition 5. Si le terme général u_n de la série est positif, la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. En effet, la suite (S_n) est alors croissante. Elle est donc soit majorée et convergente, soit non majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$. □

Corollaire 1. Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n vérifiant $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration. En effet, dans le premier cas on aura, en notant n_0 le rang à partir duquel les inégalités sont vérifiées, $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$, donc les sommes partielles de terme général u_n sont majorées et la série correspondante converge. La deuxième propriété est similaire, en utilisant cette fois-ci que la série de terme général v_n est supérieure à une suite divergant vers $+\infty$, donc diverge elle aussi vers $+\infty$. □

Théorème 1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$, alors les deux séries ont la même nature.

Démonstration. Ce théorème, ainsi que d'autres critères de convergence sur les séries, sera revu et démontré en deuxième année. Il n'est d'ailleurs pas au programme de première année, mais je vous le cite tout de même car il est extrêmement utile. $\square$

3 Séries classiques

Définition 5. Soit $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum q^n$ est appelée **série géométrique** de raison q. Les séries de terme général nq^{n-1} et $n(n-1)q^{n-2}$ sont appelées respectivement **séries géométriques dérivée et dérivée seconde** de raison q.

Remarque 6. On peut naturellement définir des séries géométriques dérivées k-ièmes pour des valeurs de k supérieures à 2.

Proposition 6. Les séries géométriques de raison q sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Démonstration. Pour les séries géométriques classiques, on sait calculer les sommes partielles depuis un certain temps : $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant les résultats sur les limites de suites géométriques, on constate la convergence de la série lorsque $|q| < 1$, vers la somme indiquée dans l'énoncé.

Pour les séries dérivées, commençons par constater qu'elles ne peuvent pas converger si $|q| \geqslant 1$ puisque le terme général ne tend pas vers 0. Dans le cas contraire, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. La somme partielle de la série géométrique classique n'est autre que $f(q)$, mais les séries géométriques dérivées peuvent également s'exprimer simplement en fonction de f, ou plutôt de ses dérivées (d'où le nom !) : $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1}$, donc $f'(q)$ représente la somme partielle de la série géométrique dérivée de raison q. De même, $f''(q)$ n'est autre que la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde de raison q. Or on sait par ailleurs que $f(q) = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, donc (via un sympathique calcul de dérivée de quotient) $f'(q) = \dfrac{-(n+1)q^n + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2} = \dfrac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$ et

$$\begin{aligned} f''(q) &= \frac{n(n+1)q^n(1-q)^2 - n(n+1)q^{n-1}(1-q)^2 + 2(1-q)(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(1-q)^4} \\ &= \frac{-n(n-1)q^{n+1} + 2(n^2-1)q^n - n(n+1)q^{n-1} + 2}{(1-q)^3}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$, en utilisant le fait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2q^n = 0$ (par croissance comparée) pour obtenir la convergence des sommes partielles vers les valeurs indiquées. $\square$

Remarque 7. On peut déduire du résultat précédent les valeurs d'autres sommes de séries. Par exemple, si $|q| < 1$, la série de terme général nq^n converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$. En effet, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k = q \times \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$, et on est ramené au cas de la série géométrique dérivée.

Exemple : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = 2$.

Proposition 7. La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x, et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Pour cette raison, cette série est souvent appelée **série exponentielle**.

Démonstration. On manque d'une définition suffisamment claire de l'exponentielle pour prouver ceci. □

Exemple : Quand on choisit $x = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Définition 6. La série de terme général $\frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.

Proposition 8. La série harmonique est divergente. Plus précisément, la somme partielle de cette série est équivalente à $\ln n$.

Démonstration. Nous allons effectuer une démonstration de ce résultat utilisant des intégrales (mais si, tout va bien se passer). Commençons par constater la chose suivante : si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\forall x \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$. En intégrant ces inégalités entre k et $k+1$, on obtient $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$, soit $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}$. Gardons l'inégalité de droite et décalons l'indice dans celle de gauche pour obtenir l'encadrement $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$. En additionnant ces encadrements pout tous les entiers de 2 à n (on ne peut pas le faire pour $k = 1$ à cause du $k - 1$ apparaissant dans le membre de gauche), on obtient alors $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$, soit $\ln n - \ln 1 \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n+1) - \ln 2$. En notant $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$, on a donc $\ln n + 1 \leqslant S_n \leqslant \ln(n+1) - \ln 2 + 1$. En divisant tout par $\ln n$, on en déduit $1 + \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \frac{1 - \ln 2}{\ln n}$. Le membre de gauche a manifestement pour limite 1, quand n quand n tend vers $+\infty$, et celui de droite également, car $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$, donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n}$, qui tend vers 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$, ce qui signifie exactement que $S_n \sim \ln n$. □

Remarque 8. Plus généralement, les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ sont appelées séries de Riemann. Elles convergent pour toutes les valeurs de $\alpha > 1$.