

# Récurrance ; Sommes, produits

ECE3 Lycée Carnot

27 septembre 2011

Pour ce troisième chapitre, un peu de théorie, puisque celui-ci va nous permettre de définir quelques notations et méthodes supplémentaires qui nous seront bien utiles par la suite (ou peut-être devrais-je dire plutôt pour les suites, puisqu'il s'agit du premier thème faisant intervenir de façon assez intensive le symbole somme et les récurrences).

## 1 Démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence est un schéma de démonstration que nous utiliserons extrêmement souvent cette année, et qu'il est donc essentiel de maîtriser parfaitement. Réaliser une bonne récurrence n'est pas très compliqué si on se force à bien en respecter la structure, la rigueur est donc de mise pour ne pas dire de bêtise!

**Proposition 1. Principe de récurrence :** On cherche à prouver simultanément un ensemble de propriétés  $P_n$  dépendant d'un entier naturel  $n$ . On procède de la manière suivante, en respectant ces étapes qui devront être apparentes dans la rédaction de notre récurrence :

- **Énoncé** clair et précis des propriétés  $P_n$  et du fait qu'on va réaliser une récurrence.
- **Initialisation** : on vérifie que  $P_0$  est vraie (habituellement un calcul très simple).
- **Hérédité** : on suppose  $P_n$  vraie pour un entier  $n$  quelconque (c'est l'hypothèse de récurrence) et on prouve  $P_{n+1}$  à l'aide de cette hypothèse (si on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, c'est qu'on n'avait pas besoin de faire une récurrence!).
- **Conclusion** : En invoquant le principe de récurrence, on peut affirmer avoir démontré  $P_n$  pour tout entier  $n$ .

**Exemple :** On considère la suite numérique définie de la façon suivante :  $u_0 = 4$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 2} + 2$ . On souhaite prouver que cette suite est minorée par 2, c'est-à-dire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 2$ . Nous allons pour cela, bien évidemment, procéder par récurrence :

- **Énoncé** : Nous allons prouver par récurrence la propriété  $P_n : u_n > 2$ .
- **Initialisation** :  $u_0 = 4 > 2$ , donc la propriété  $P_0$  est vérifiée.
- **Hérédité** : Supposons désormais  $P_n$  vraie, c'est-à-dire que  $u_n > 2$ , et essayons de prouver que  $u_{n+1} > 2$ . C'est en fait assez simple en partant de l'hypothèse de récurrence :  $u_n > 2 \Rightarrow u_n - 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{u_n - 2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{u_n - 2} + 2 > 2 \Rightarrow u_{n+1} > 2$ .
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, la propriété  $P_n$  est vrai pour tout entier  $n$ .

*Remarque 1.* Variations du principe de récurrence :

Le monde mathématique n'étant pas parfait, une récurrence classique n'est hélas pas toujours suffisante pour montrer certaines propriétés. Il faut donc être capable de modifier légèrement la structure dans certains cas :

- si on ne cherche à montrer  $P_n$  que lorsque  $n \geq n_0$  ( $n_0$  étant un entier fixe dépendant du contexte), on peut toujours procéder par récurrence, mais en initialisant à  $n_0$ .
- il est parfois nécessaire que l'hypothèse de récurrence porte non pas sur une valeur de  $n$ , mais sur deux valeurs consécutives. On peut alors effectuer une récurrence double : on vérifie  $P_0$  et  $P_1$  lors de l'étape d'initialisation, et on prouve  $P_{n+2}$  à l'aide de  $P_n$  et  $P_{n+1}$  lors de l'hérédité (on peut de même effectuer des récurrences triples, quadruples, etc. en faisant une initialisation triple ou plus, et en prenant une hypothèse de récurrence triple ou plus ; dans tous les cas on ne démontre qu'une seule propriété lors de l'hérédité).
- on peut même avoir besoin pour prouver l'hérédité que la propriété soit vérifiée pour **tous** les entiers inférieurs. Dans ce cas, on parle de récurrence forte : le plus simple est de modifier la définition de la propriété  $P_n$  pour lui donner un énoncé commençant par  $\forall k \leq n$ . Ainsi, lorsqu'on suppose  $P_n$  vérifiée, on a une relation vraie pour toutes les valeurs de  $k$  inférieures ou égales à  $n$  (les plus malins d'entre vous noteront d'ailleurs qu'on peut toujours rédiger une récurrence sous forme de récurrence forte, ça ne demande pas plus de travail et ça ne peut pas être moins efficace ; c'est toutefois un peu plus lourd et déconseillé sauf nécessité).

## 2 Sommes et produits

### 2.1 Sommes : notation

La somme est l'opération la plus élémentaire qui soit en mathématiques, vous l'utilisez d'ailleurs fréquemment depuis une bonne dizaine d'années maintenant. Mais autant sommer deux ou trois nombres est chose aisée, autant l'affaire se complique quand on a besoin de faire la somme d'un grand nombre de termes (voire même d'une infinité, comme on le verra un peu plus tard). Plutôt que de recourir à des petits points à la fois peu rigoureux et inefficaces, on utilise une notation un peu plus complexe au premier abord, mais qui simplifie grandement les calculs une fois maîtrisée.

**Problème introductif** : L'architecte alexandrin Numérobis souhaite contruire, pour la gloire de sa reine Cléopâtre, une magnifique pyramide de 50 étages sur le modèle suivante : l'étage supérieur est constitué d'un seul bloc de pierre, le deuxième de quatre bloc (un carré de deux blocs de côté), le troisième de neuf blocs (carré de trois blocs de côté), et ainsi de suite jusqu'à l'étage le plus bas, qui est donc constitué d'un carré de 50 blocs de côté. Numérobis n'étant pas très doué en calcul, il a peur de se tromper dans ses additions ; existe-t-il une jolie formule pour lui venir en aide ?

**Définition 1.** Le symbole  $\sum$  signifie « somme ». Plus précisément, la notation  $\sum_{i=2}^{i=7} i^2$  se lit par

exemple « somme pour  $i$  variant de 2 à 7 de  $i^2$  » et peut se détailler de la façon suivante :

$$\sum_{i=2}^{i=7} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 139.$$

*Remarque 2.*

- Les bornes choisies, 2 et 7, ne sont que des exemples, on peut prendre n'importe quoi, y compris

des bornes variables, par exemple  $\sum_{i=n}^{i=n^2} i^2 = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n^2-1)^2 + (n^2)^2$ .

Par contre, la borne de départ doit toujours être plus petite que la borne d'arrivée (sinon la somme est nulle).

- La lettre  $i$  est une variable muette, autrement dit on peut la changer par n'importe quelle autre lettre sans changer la valeur de la somme. On choisit traditionnellement les lettres  $i, j, k$ , etc. pour les indices de sommes.
- Dans une somme, la variable muette prend toujours **toutes** les valeurs entières comprises entre la valeur initiale et la valeur finale.

**Exemple :** Si  $a$  est une constante,  $\sum_{i=2}^{i=n} a = (n-1)a$  (faites bien attention au nombre de termes que contient la somme...).

**Proposition 2.** Règles de calcul sur les sommes. On a le droit d'effectuer les opérations suivantes :

- factoriser par une constante :  $\sum_{i=0}^{i=n} 3i^2 = 3 \sum_{i=0}^{i=n} i^2$
- séparer ou regrouper des sommes de mêmes indices :  $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 + 2^i = \sum_{i=0}^{i=n} i^2 + \sum_{i=0}^{i=n} 2^i$
- séparer les indices en deux (relation de Chasles) :  $\sum_{i=0}^{i=30} i^2 = \sum_{i=0}^{i=12} i^2 + \sum_{i=13}^{i=30} i^2$
- faire un changement d'indice :  $\sum_{i=1}^{i=30} i^2 = \sum_{j=0}^{j=29} (j+1)^2$  (on a posé  $j = i - 1$ )

*Remarque 3.* Tenter de simplifier d'une façon ou d'une autre une somme de la forme  $\sum_{i=0}^{i=n} a_i b_i$  est par contre une très bonne manière de s'attacher la rancoeur tenace de votre professeur ; les sommes et produits ne font pas bon ménage.

**Exemple :** La technique de la somme télescopique consiste à constater que la différence de deux sommes ayant beaucoup de termes communs comporte en fait nettement moins de termes que ce

qu'elle n'en a l'air au départ. Considérons  $S = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}$ . A priori pas évident à calculer, du moins

tant qu'on a pas constaté que  $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{i+1-i}{i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}$ . On peut alors faire le calcul suivant :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n+1} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si la fin du calcul ne vous semble pas claire, on peut aussi voir les choses ainsi :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

## 2.2 Sommes classiques

**Proposition 3.** •  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left( \sum_{i=1}^{i=n} i \right)^2$
- $\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

*Démonstration.* • Nous allons démontrer par récurrence que la propriété  $P_n : \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

est vraie pour tout entier  $n$ . Pour  $n = 0$ , nous avons  $\sum_{i=0}^{i=0} i = 0$  et  $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ , donc  $P_0$  est vraie.

Supposons  $P_n$  vraie pour un entier  $n$  quelconque, c'est-à-dire que  $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ . On peut alors effectuer le calcul suivant :  $\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{i=n} i + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , ce qui prouve  $P_{n+1}$ . D'après le principe de récurrence, nous pouvons donc affirmer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ .

- Nous allons prouver par récurrence la propriété  $P_n : \sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Pour  $n = 0$ , nous avons  $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = 0^2 = 0$ , et  $\frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0$ , donc  $P_0$  est vérifiée. Supposons désormais  $P_n$  vraie pour un entier  $n$  quelconque, on peut alors écrire  $\sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{i=n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$ , donc  $P_{n+1}$  est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

- Nous allons prouver par récurrence la propriété  $P_n : \sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ . Pour  $n = 0$ , nous avons  $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = 0^3 = 0$ , et  $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$ , donc  $P_0$  est vérifiée. Supposons désormais  $P_n$  vraie pour un entier  $n$  quelconque, on peut alors écrire  $\sum_{i=0}^{i=n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{i=n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ , donc  $P_{n+1}$  est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

- Nous allons prouver par récurrence la propriété  $P_n : \sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . Pour  $n = 0$ , nous avons  $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = q^0 = 1$ , et  $\frac{1-q^1}{1-q} = 1$ , donc  $P_0$  est vérifiée. Supposons désormais  $P_n$  vraie pour un entier  $n$  quelconque, on peut alors écrire  $\sum_{k=0}^{k=n+1} q^k = \sum_{k=0}^{k=n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$ , donc  $P_{n+1}$  est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ . □

### 2.3 Sommes doubles

Rien ne nous interdit de mettre une somme à l'intérieur d'une autre somme. Dans ce cas, il est toutefois très important d'utiliser deux indices différents pour les deux sommes, sous peine de confu-

sion totale. Plusieurs notations sont possibles pour exprimer des sommes doubles :  $\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} i\sqrt{j} =$

$\sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} i\sqrt{j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i\sqrt{j}$ . Cette somme est constituée de  $n^2$  termes qu'on peut par exemple représenter dans un tableau contenant  $n$  lignes et  $n$  colonnes. L'ordre dans lequel on place les deux sommes est indifférent (d'où également la possibilité de n'utiliser qu'une seule somme), on a donc intérêt à les placer dans l'ordre le plus pratique pour le calcul, ici par exemple :

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 3j = 3 \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=i} i = 3 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{i=n} i^2 + i = \frac{3}{2} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{4} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 3n)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

## 2.4 Produits

Le fonctionnement est très similaire à celui des sommes :

**Définition 2.** Le symbole  $\prod$  signifie « produit ». Par exemple,  $\prod_{i=1}^{i=5} i = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ .

**Définition 3.** On appelle **factorielle** de l'entier naturel  $n$ , et on note  $n!$ , le nombre  $n! = \prod_{i=1}^{i=n} i$ .

**Exemples :**  $\prod_{i=1}^{i=n} a = a^n ; \quad \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{i=n+1} i}{\prod_{i=1}^{i=n} i} = n+1$

**Proposition 4.** Les règles de calcul suivantes peuvent être utiles quand on manipule des produits :

- séparer ou regrouper des produits ayant les mêmes indices :  $\prod_{i=1}^{i=n} a_i \times \prod_{i=1}^{i=n} b_i = \prod_{i=1}^{i=n} a_i b_i$
- séparer les indices (relation de Chasles) :  $\prod_{i=1}^{i=n} a_i = \prod_{i=1}^{i=p} a_i \times \prod_{i=p+1}^{i=n} a_i$
- faire un changement d'indice :  $\prod_{i=2}^{i=n+1} a_i = \prod_{j=1}^{j=n} a_{j+1}$

*Remarque 4.* Bien entendu, tenter de simplifier  $\prod_{i=1}^{i=n} (a_i + b_i)$  serait une grave erreur que, j'en suis certain, vous ne commettrez pas deux fois (ni même une seule, si possible).

**Exemple :** Un petit calcul de produit pour finir ce paragraphe.  $P = \prod_{i=1}^{i=n} 3i = \prod_{i=1}^{i=n} 3 \times \prod_{i=1}^{i=n} i = 3^n n!$