Problème : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

13 décembre 2011

1. (a) Les cinq premières lignes (pour n allant de 0 à 4 si vous préférez) suffisent pour cette question : 1 puis 1 1 puis 1 2 1 puis 1 3 3 1 puis 1 4 6 4 1. On en déduit que $u_0 = \frac{1}{1} = 1$; $u_1 = 1+1 = 2$; $u_2 = 1+\frac{1}{2}+1 = \frac{5}{2}$; $u_3 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1 = \frac{8}{3}$ et $u_4 = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+1 = \frac{8}{3}$.

   (b) On a $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n! \times (n-k)}{k!(n-k)! \times (k+1)} = \binom{n}{k} \times \frac{n-k}{k+1}$. Les deux nombres étant positifs, $\binom{n}{k+1}$ sera plus grand que $\binom{n}{k}$ si $\frac{n-k}{k+1} \geqslant 1$, c'est-à-dire si $n-k \geqslant k+1$, soit $2k \leqslant n-1$, ce qui donne bien la condition de l'énoncé.

   (c) De la question précédente découle que $\binom{n}{2} \leqslant \binom{n}{3} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{k}$ pour tout entier k inférieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. Or, en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux, on aura de même $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{n-2}$ si $k \geqslant \frac{n+1}{2}$. Comme par ailleurs $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$, on aura bien pour tous les entiers compris entre 2 et $n-2$, $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{2}$, d'où en passant à l'inverse la première inégalité demandée. Il suffit ensuite de découper la somme définissant u_n en petits morceaux : $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{n} + 1 = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. On en déduit sans problème que $u_n \geqslant 2$, et en utilisant l'inégalité qu'on vient de démontrer, que $u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

   (d) En explicitant la valeur du coefficient binomial, l'inégalité de droite donne en fait $u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{2}{n(n-1)} = 2 + \frac{2}{n} + \frac{n-3}{n(n-1)}$. Cette expression ayant pour limite 2 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2. (a) Puisque $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n}{k}$, on a certainement $\binom{n+1}{k+1} \geqslant \binom{n}{k}$, d'où l'inégalité demandée en passant à l'inverse.

   (b) Un peu de courage, calculons la différence des deux termes : $\frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} - \frac{1}{\binom{n+1}{1}} -$

$$\frac{1}{\binom{n+1}{2}} - \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} - \frac{6}{(n-1)n(n+1)}$$
$$= \frac{(n-1)(n+1)+2(n+1)-n(n-1)-2(n-1)-6}{(n-1)n(n+1)}$$
$$= \frac{n^2-1+2n+2-n^2+n-2n+2-6}{(n-1)n(n+1)} = \frac{n-3}{(n-1)n(n+1)}$$ qui est bien positif si $n \geqslant 3$.

(c) En effet, si $n \geqslant 3$, $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 1 + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 1 + \frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{\binom{n+1}{3}} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$. L'expression de droite n'étant autre que celle de u_{n+1}, on aura bien $u_n \geqslant u_{n+1}$ si $n \geqslant 3$, d'où la décroissance de la suite.

3. (a) Il suffit de poser $i = n-k$, le $k!(n+1-k)!$ du numérateur devient alors un $(n-i)!(i+1)!$, le dénominateur ne change pas, et i varie de $n-n$ à $n-0$, c'est-à-dire de 0 à n.

(b) L'idée est d'additionner la somme initiale avec celle obtenue à la question précédente, et de simplifier : $2\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!}$
$$= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(k+1)!(n-k)!}{n!}$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{(n+1-k)\times k!(n-k)!}{n!} + \frac{(k+1)\times k!(n-k)!}{n!} \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(n+1-k+k+1)\times k!(n-k)!}{n!} = (n+2)\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n-k)!}{n!}.$$

(c) On a $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} = \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!}$. En séparant le dernier terme et en utilisant la question précédente,
$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n-k)!}{n!} = 1 + \frac{n+2}{2n+2}u_n.$$

(d)
```
PROGRAM cacahouete;
USES wincrt;
VAR u :real; i,n :integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
u :=1;
FOR i :=0 TO n-1 DO u :=1+(i+2)*u/(2*i+2);
WriteLn(u);
END.
```

(e) En utilisant la relation précédente, $v_{n+1} = (n+1)(u_{n+1}-2) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2n+2}u_n - 1\right) = \frac{n+2}{2}u_n - n - 1 = \frac{n}{2}u_n - n + u_n - 1 = \frac{n}{2}(u_n-2) + u_n - 1 = \frac{1}{2}v_n + u_n - 1.$

En admettant que (v_n) converge vers une limite l, le membre de gauche de cette égalité tend vers l, et celui de droite vers $\frac{1}{2}l + 1$ (puisque la suite (u_n) a pour limite 2), donc on doit avoir $l = \frac{1}{2}l + 1$, soit $l = 2$. On a donc $\lim_{n \to +\infty} n(u_n - 2) = 2$, soit $u_n - 2 \sim \frac{2}{n}$.