Un exercice supplémentaire sur les coefficients binomiaux

ECE3 Lycée Carnot

13 décembre 2011

On définit la suite (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. (a) Á l'aide des premières lignes du triangle de Pascal, et calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

   (b) Montrer que, si $k \leqslant \dfrac{n-1}{2}$, $\dbinom{n}{k} \leqslant \dbinom{n}{k+1}$ (autrement dit, chaque ligne du triangle de Pascal est constitué de termes croissants jusqu'à son milieu).

   (c) En déduire que, $\forall 2 \leqslant k \leqslant n-2$, $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \dfrac{1}{\binom{n}{2}}$, puis que $\forall n \geqslant 2$, $2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

   (d) Prouver que (u_n) converge, et préciser sa limite.

2. (a) À l'aide de la formule de Pascal, montrer que $\forall k \leqslant n$, $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \dfrac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$.

   (b) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{\binom{n}{1}} + \dfrac{1}{\binom{n}{2}} \geqslant \dfrac{1}{\binom{n+1}{1}} + \dfrac{1}{\binom{n+1}{2}} + \dfrac{1}{\binom{n+1}{3}}$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que (u_n) est décroissante à partir de u_3.

3. (a) Montrer à l'aide d'un changement d'indice que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(k+1)!(n-k)!}{n!}$.

   (b) En déduire que $2\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} = (n+2)\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n-k)!}{n!}$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2n+2} u_n$.

   (d) Écrire un programme PASCAL calculant la valeur de u_n pour un entier n choisi par l'utilisateur (en utilisant la relation obtenue à la question précédente).

   (e) En admettant que la suite (v_n) définie par $v_n = n(u_n - 2)$ converge, déterminer sa limite, et en déduire un équivalent simple de $u_n - 2$.