Calcul ; Logique

ECE3 Lycée Carnot

15 septembre 2011

Pour ce premier chapitre de l'année, quelques rappels sur des techniques de calculs élémentaires et qui doivent donc être totalement maitrisées pour le reste de l'année, mais aussi de nouvelles notations que nous utiliserons en permanence dans la suite du cours pour énoncer les propriétés et théorèmes de façon compacte.

1 Calcul

1.1 Fractions

Plus qu'un cours construit sur le calcul fractionnaire, que vous êtes tout de même censés maîtriser depuis quelques années, une petite liste de conseils quand vous manipulez des fractions :

- Simplifiez toujours vos résultats, qui sont souvent réutilisés ensuite dans d'autres calculs. Ainsi, on ne laisse pas le résultats d'un calcul sous la forme $\frac{2}{10}$, on le simplifie en $\frac{1}{5}$.
- Lors de mises au même dénominateur (pour un calcul de somme ou de différence de fractions), essayez de prendre le dénominateur de plus petit possible, par exemple $\frac{5}{12}-\frac{7}{18}=\frac{15}{36}-\frac{14}{36}=\frac{1}{36}$.
- Un nombre en facteur devant une fraction peut être rentré dans la fraction : $a\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$.
- Évitez les quotients de quotients, et en cas de nécessité, faites des fractions de longueur bien distinctes pour savoir quelle est la fraction principale. Par exemple, $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$.
- Une équation de la forme $\frac{A}{B}=0$ ne peut avoir pour solutions que les valeurs annulant son numérateur A (et certainement pas les valeurs annulant B, qui sont des valeurs interdites).

1.2 Puissances

Définition 1. Soit x un nombre réel et n un entier naturel, la **puissance n-ème** de x est obtenue en multipliant n fois x par lui-même. Autrement dit, $x^n=\underbrace{x\times x\times\cdots\times x}_{\text{n fois}}$.

Définition 2. Si p est un entier négatif, on note par convention $x^p=\frac{1}{x^{-p}}$.

Remarque 1. La notation puissance peut également être utilisée avec des exposants fractionnaires, on peut notamment noter $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$. Ce prolongement de la notation est en parfaite cohérence avec les règles de calcul rappelées ci-après, nous verrons un peu plus tard comment généraliser à des puissances quelconques.

Proposition 1. Règles de calcul sur les puissances.

- $x^a \times x^b = x^{a+b}$
- $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
- $x^a \times y^a = (xy)^a$
- $\dfrac{x^a}{y^a} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a$
- $(x^a)^b = x^{ab}$

Remarque 2. Essayer de simplifier des sommes de puissances ou des expressions du style 2×3^5 est une très mauvaise idée.

Exemple : $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Exemple : $\sqrt{18} + 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

1.3 Identités remarquables

Définition 3. Une **factorisation** consiste à transformer une somme en produit. Au contraire, un **développement** transforme un produit en somme.

Proposition 2. Identités remarquables.
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Remarque 3. La troisième identité remarquable est utilisée dans tous les calculs faisant intervenir des **quantités conjuguées**. La quantité conjuguée d'une somme $A + B$ est simplement la différence $A - B$. Le fait de multiplier numérateur et dénominateur d'une fraction par une quantité conjuguée permet par exemple de faire disparaitre les racines carrées se trouvant au dénominateur. Ainsi, $\dfrac{2+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \dfrac{8+5\sqrt{2}}{7}$.

1.4 Polynômes

Définition 4. Un **polynôme** est une expression de la forme $a_0 + a_1x + \dots a_nx^n$, n étant un entier naturel appelé degré du polynôme et $a_0, a_1, \dots a_n$ des nombres réels appelés coefficients du polynôme.

Proposition 3. Résolution des équations du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.
En notant $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation, on a les cas suivants :
- si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution double $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

Proposition 4. Tableau de signe d'un polynôme du second degré.
Dans le cas où le polynôme admet deux racines, le tableau de signe ressemble à ceci :

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe opposé à celui de a	0	signe de a

Remarque 4. Lorsqu'on effectue le tableau de signe d'un polynôme, quel que soit son degré, le signe se trouvant à droite de la dernière racine est toujours celui de a (coefficient du terme de plus haut degré).

Proposition 5. Si un polynôme s'annule en $x = a$, alors on peut le factoriser par $(x - a)$ (et le deuxième facteur sera un polynôme de degré un de moins que le polynôme initial).

Exemple : On utilise ce principe pour résoudre notamment des équations du troisième quand on arrive à en trouver une racine dite « évidente » (il existe des méthodes générales pour résoudre les équations du troisième et du quatrième degré, mais nous ne les verrons pas car elles nécessitent des connaissances sur les nombres complexes).

Prenons l'équation $x^3 - x^2 - x - 2$, qui a pour racine évidente 2 (puisque $2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0$). On peut donc effectuer une factorisation sous la forme $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$. Pour déterminer les coefficients a, b et c et pouvoir finir la résolution, nous utiliserons le principe suivant :

Proposition 6. Principe d'identification des coefficients.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Ici, en développant le membre de droite, on obtient $x^3 - x^2 - x - 2 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$, dont on déduit, en regardant coefficient par coefficient, les égalités $a = 1$, $b - 2a = -1$, $c - 2b = -1$ et $-2c = -2$, dont on déduit $a = b = c = 1$ (le système a une solution unique). On a donc $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$. Le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, il n'a pas de racine, et $x = 2$ est donc l'unique solution de l'équation initiale.

1.5 Inégalités

À nouveau, pas vraiment de cours construit pour ce paragraphe, mais une liste de ce qu'on a le droit de faire, et surtout de ce qu'on n'a pas le droit de faire lorsqu'on manipule des inégalités.

- On peut ajouter ou soustraire une même constante à tous les membres d'une inégalité ou d'un encadrement. Ainsi, si $1 \leqslant x \leqslant 3$, on aura $-2 \leqslant x - 3 \leqslant 0$.
- On peut multiplier ou diviser une inégalité par une constante, en changeant le sens des inégalités si cette constante est négative. Ainsi, si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $-6 \leqslant -2x \leqslant -2$.
- On peut additionner des inégalités. Si $1 \leqslant x \leqslant 3$ et $2 \leqslant y \leqslant 5$, alors $3 \leqslant x + y \leqslant 8$.
- On ne peut pas soustraire deux inégalités. En reprenant l'exemple précédent, si on souhaite encadrer $x - y$, on commence par encadrer $-y$ sous la forme $-5 \leqslant -y \leqslant -2$, puis on additionne les encadrements de x et de $-y$ pour obtenir $-4 \leqslant x - y \leqslant 1$.
- On peut multiplier deux inégalités à condition que leurs membres soient tous positifs. Dans le cas contraire, il convient de prendre soin de réfléchir aux bornes obtenues. Ainsi, toujours avec les mêmes encadrements pour x et y, on obtient $2 \leqslant xy \leqslant 15$.
- On peut inverser une inégalité à condition que tous ses membres soient de même signe (positifs ou négatifs, peu importe), en changeant le sens des inégalités. Cela découle de la décroissance de la fonction inverse sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Ainsi, on aura $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$.
- Pour diviser deux inégalités, tout comme pour la soustraction, on commence par encadrer un inverse avant de tenter une multiplication. Ainsi, on aura ici $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{y}{x} \leqslant 5$.
- On peut appliquer à une inégalité toute fonction croissante sans en changer le sens, et toute fonction décroissante en en changeant le sens. Par exemple, quand cela a un sens, on peut mettre des racines carrées sur tous les membres d'une inégalité sans problème.

2 Logique

2.1 Ensembles

Nous reverrons plus en détail dans un chapitre ultérieur les opérations sur les ensembles, nous nous contenterons donc ici du strict minimum.

Définition 5. Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques. Il est souvent décrit par une propriété commune de ces objets, par exemple $[2; 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 3\}$. Le symbole $\in$ signifie

« appartient à » et le symbole | signifie « tels que ». La notation entre accolades désigne toujours un ensemble en mathématiques.

Définition 6. Deux ensembles E et F sont **égaux** s'ils contiennent exactement les même éléments. L'ensemble F est **inclus** dans l'ensemble E si tout élément de F appartient aussi à E. On le note $F \subset E$.

Remarque 5. Il ne faut pas confondre appartenance et inclusion. Ainsi, $\sqrt{7} \in [2; 3[$, mais $[\pi - 1; \sqrt{7}] \subset [2; 3[$.

Définition 7. L'ensemble ne contenant aucun élément, appelé **ensemble vide**, est noté $\emptyset$.

2.2 Quantificateurs

Définition 8. Nous utiliserons tout au long de l'année les deux symboles supplémentaires suivants, appelés un peu pompeusement **quantificateur existentiel** et **quantificateur universel** :

- le symbole $\exists$ signifie « il existe » ; ainsi, le fait qu'une fonction f s'annule sur l'intervalle $[0; 1]$ peut s'écrire plus mathématiquement $\exists x \in [0; 1]$, $f(x) = 0$.
- le symbole $\forall$ signifie « quel que soit » ; ainsi, le fait qu'une fonction f soit nulle sur l'intervalle $[0; 1]$ s'écrit $\forall x \in [0; 1]$, $f(x) = 0$. Notez bien la différence entre ces deux exemples, il est évidemment essentiel de ne pas confondre les deux symboles.

Remarque 6. Dans les cas où a besoin de plusieurs quantificateurs pour exprimer une propriété (ça arrive souvent), l'ordre dans lequel on les dispose est aussi très important. On les lit naturellement de gauche à droite, ce qui donne par exemple :

- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) > f(y)$ signifie que f admet un maximum (global) en x ($f(x)$ est plus grand que toutes les autres images par f).
- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \neq y \in \mathbb{R}$, $f(x) > f(y)$ signifie que f n'admet pas de maximum (quelle que soit la valeur de y, on peut trouver un x ayant une image plus grande par f).

Définition 9. Le symbole $\Rightarrow$ est un symbole d'**implication** : $A \Rightarrow B$ signifie que la propriété B est vraie dès que A l'est (par contre, si A est fausse, B peut bien être vraie ou fausse, ça n'a pas d'importance). Le symbole $\Leftrightarrow$ est un symbole d'équivalence : $A \Leftrightarrow B$ signifie que A implique B **et** B implique A. Autrement dit, dès que l'une est vraie, l'autre aussi, et dès que l'une est fausse l'autre aussi. Autre façon de voir les choses : $A \Rightarrow B$ et sa **réciproque** $B \Rightarrow A$ sont toutes les deux vraies.

Exemple (théorème de Pythagore et réciproque) : Un triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Remarque 7. Quand on calcule les longueurs des côtés d'un triangle, et qu'on invoque l'absence d'égalité de Pythagore pour prouver que le triangle n'est pas rectangle, on n'utilise pas la réciproque du théorème, mais bel et bien le théorème lui-même, ou plutôt sa **contraposée** : si $A \Rightarrow B$, la contraposée stipule que la négation de B implique la négation de A. Lorsqu'une implication est vraie, sa contraposée l'est également.