

# Limites, continuité

ECE3 Lycée Carnot

10 janvier 2012

Ce premier gros chapitre sur l'étude de fonctions depuis septembre regroupe en fait des résultats de nature diverse, qui recouvrent à peu près tout ce que vous devez savoir faire avec des fonctions hors dérivation (un autre chapitre sera ultérieurement consacré à ce sujet). Au programme donc, des calculs de limites « façon prépa » (cette partie sera très similaire à ce que nous avons déjà pu voir à ce sujet sur les suites); une généralisation de la notion d'asymptote, qui nous permettra de faire des tracés de courbe plus précis du côté des infinis; et quelques résultats concernant la continuité, avec notamment le théorème des valeurs intermédiaires que vous devez déjà connaître. On en profitera également pour refaire un petit point sur les suites implicites.

## 1 Limites

### 1.1 Définitions

**Définition 1.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle du type  $[a; +\infty[$ . La fonction  $f$  admet pour limite  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, f(x) \geq M$ . On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

*Remarque 1.* Cette définition est exactement identique à celle donnée pour les suites, en remplaçant bien entendu  $u_n$  par  $f(x)$ . On définit de même une limite égale à  $-\infty$ , ou des limites infinies quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . Par exemple,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \leq A, f(x) \geq M$ .

**Définition 2.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle du type  $[a; +\infty[$ , et  $l \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  admet pour limite  $l$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \geq M, |f(x) - l| \leq \varepsilon$ . On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

*Remarque 2.* Cette définition est à nouveau similaire à celle de la limite d'une suite. De même,  $f$  admet pour limite  $l$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \leq M, |f(x) - l| \leq \varepsilon$ .

**Définition 3.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,  $a \in I$  et  $l \in \mathbb{R}$ , alors la fonction  $f$  admet pour limite  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ . On le note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

*Remarque 3.* Si on y regarde de plus près, cette définition ne fait que retranscrire formellement la notion intuitive de limite : on peut se rapprocher autant que possible de  $l$  quitte à se rapprocher suffisamment de  $a$ .

**Exemple :** Prouvons à l'aide de cette définition que  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , on cherche une valeur de  $\eta$  telle que  $|x - 1| \leq \eta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$ . Or,  $|x^2 - 1| = |x - 1| \times |x + 1|$  et, si  $x \in [1 - \eta; 1 + \eta]$ , on a  $|x + 1| \leq 2 + \eta$ , donc  $|x^2 - 1| \leq \eta(2 + \eta) \leq 3\eta$  en prenant  $\eta \leq 1$ , ce qu'on peut toujours supposer puisqu'on ne cherche qu'une valeur qui fonctionne. Il suffit alors de poser  $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$  pour satisfaire à la définition d'une limite finie.

**Définition 4.** On dit que  $f$  admet  $l$  pour limite à gauche en  $a$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in [a - \eta; a[ \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ . On le note  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ . De même, on peut définir une limite à droite en  $a$  égale à  $l$ .

**Exemple :** La fonction partie entière admet en chaque entier une limite à gauche et une limite à droite différentes. Par exemple,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} Ent(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} Ent(x) = 2$ .

**Définition 5.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I \setminus \{a\}$ . La fonction  $f$  admet pour limite  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  si  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) \geq M$ .

*Remarque 4.* La présence de l'inégalité  $0 < |x - a|$  est nécessaire puisque la fonction, dans le cas où elle serait définie en  $a$ , ne pourrait y admettre une limite infinie. On définit de même une limite égale à  $-\infty$  en  $a$  en changeant le sens de la dernière inégalité. On peut prolonger la notion de limite à gauche et à droite au cas de limites infinies.

## 1.2 Opérations et limites

Les résultats sont exactement les mêmes que ceux déjà vus dans le cas des suites. Le fait que la limite soit prise en  $+\infty$ , en  $-\infty$  ou en  $a$  ne change absolument rien aux contenus des tableaux, que nous ne reproduirons donc pas ici.

**Exemple :** On cherche la limite de  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$  quand  $x$  tend vers  $1^+$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 3 = 4$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ . La limite serait opposée en  $1^-$ .

*Remarque 5.* Le signe étant particulièrement important lors du calcul de ce genre de limites, on aura souvent besoin de recourir à des tableaux de signe pour déterminer par exemple si un dénominateur a pour limite  $0^+$  ou  $0^-$ .

## 1.3 Négligeabilité, équivalence

Les notions de négligeabilité et d'équivalence pour les fonctions sont très proches de ce qu'on a pu voir sur les suites. La différence est que, pour une fonction, il est indispensable de préciser à quel endroit l'équivalence ou la négligeabilité est valable. Un équivalent valable quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ne l'est en général pas quand  $x$  tend vers 0.

**Définition 6.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  (qui peut être égal à  $+\infty$  ou à  $-\infty$ ), alors  $f$  et  $g$  sont équivalentes en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , ce que l'on note

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ . La fonction  $f$  est négligeable devant la fonction  $g$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , ce qu'on note  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ .

**Exemples :** On peut réinterpréter les limites classiques en termes d'équivalents et de négligeabilité, notamment  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

Les propriétés et utilisations habituelles des équivalents sont les mêmes que pour les suites :

- Deux fonction équivalentes en  $a$  y ont le même comportement (et notamment y admettent la même limite quand elle en ont une) d'où l'intérêt des équivalents pour les calculs de limites et de branches infinies.
- On peut multiplier, diviser, inverser, élever à une puissance quelconque (mais constante) un équivalent.
- On ne peut toujours pas additionner ni composer des équivalents en général.

## 1.4 Asymptotes

Par définition, une asymptote est une droite dont la courbe représentative d'une fonction se rapproche « à l'infini » (éventuellement en la coupant, contrairement à une croyance très répandue). Il en existe de trois types, auxquelles nous allons ajouter la notion de branche infinie.

**Définition 7.** La courbe représentative d'une fonction  $f$  admet pour **asymptote verticale** la droite d'équation  $x = a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ .

*Remarque 6.* Cela suppose que la fonction  $f$  n'est pas définie en  $a$  (cas le plus fréquent), ou y admet une discontinuité violente. Il n'est pas interdit (même si c'est rare) d'avoir par exemple une limite infinie à gauche de  $a$ , mais finie à droite de  $a$ .

**Exemple :** La courbe de la fonction  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$  admet les deux droites d'équation  $x = 2$  et  $x = -2$  comme asymptotes verticales.

**Définition 8.** La courbe représentative d'une fonction  $f$  admet pour **asymptote horizontale** la droite d'équation  $y = a$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  ou si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ .

**Exemple :** La courbe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5}$  admet la droite d'équation  $y = 1$  comme asymptote horizontale en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**Définition 9.** La courbe représentative d'une fonction  $f$  admet comme **asymptote oblique** la droite d'équation  $y = ax + b$  (avec  $a \neq 0$ ) si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ . Une autre façon de voir les choses est de dire que  $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ , avec  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$ .

**Exemple :** La courbe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$  a pour asymptote oblique la droite d'équation  $y = x - 2$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  (voir plus loin pour le détail d'un calcul du même genre).

## 1.5 Branches paraboliques

**Définition 10.** La courbe représentative d'une fonction  $f$  admet en  $+\infty$  une **branche parabolique de direction**  $(Ox)$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ , mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  (on a une définition similaire en  $-\infty$ ).

**Exemples :** Les fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  ou  $x \mapsto \ln x$  admettent une branche parabolique de direction  $(Ox)$ .

**Définition 11.** La courbe représentative d'une fonction  $f$  admet en  $+\infty$  une **branche parabolique de direction**  $(Oy)$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$  (on a une définition similaire en  $-\infty$ ).

**Exemple :** La fonction  $x \mapsto x^2$  admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  (d'où le nom de branche parabolique, d'ailleurs), ainsi que la fonction  $x \mapsto e^x$  en  $+\infty$ .

**Définition 12.** La courbe représentative d'une fonction  $f$  admet en  $+\infty$  une **branche parabolique de direction la droite d'équation**  $y = ax$  ( $a \neq 0$ ) si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ , mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$  (on a une définition similaire en  $-\infty$ ).

*Remarque 7.* Comme dans le cas des autres branches paraboliques, cela signifie que la courbe a une direction qui se rapproche de celle de la droite considérée, mais sans avoir d'asymptote oblique (autrement dit, la courbe s'éloigne de plus en plus de la droite d'équation  $y = ax$ , tout en ayant une direction qui se rapproche de celle de la droite).

**Exemple :** La fonction  $f(x) = x + \ln x$  a une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = x$  en  $+\infty$ .

### Plan d'étude des branches infinies :

Quand on cherche à étudier les branches infinies d'une fonction, on procède dans l'ordre suivant :

- On calcule la limite de  $f$ . Si elle est finie, on a une asymptote horizontale, si elle est infinie on continue.
- On calcule la limite de  $\frac{f(x)}{x}$ . Si elle est nulle ou infinie, on a une branche parabolique de direction  $(Ox)$  ou  $(Oy)$ . S'il y a une limite finie non nulle  $a$ , on continue.
- On calcule la limite de  $f(x) - ax$ . Soit elle est finie égale à  $b$  et on a une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$ , soit elle est infinie, et il y a une branche parabolique de direction  $y = ax$ .

**Étude des branches infinies de  $f(x) = \frac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$  :**

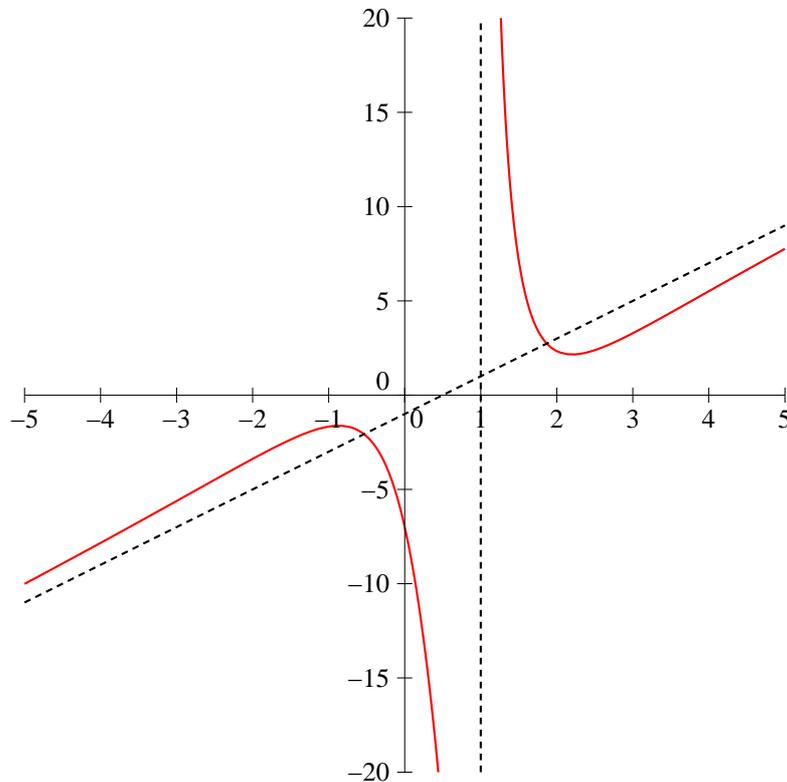
Commençons par déterminer le domaine de définition :  $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$  a pour racine évidente  $x = 1$ , et se factorise en  $(x - 1)(x^2 - x + 1)$  (je vous passe les détails de la factorisation). Le trinôme  $x^2 - x + 1$  a pour discriminant  $\Delta = -3$ , il ne s'annule donc jamais (il est toujours positif). On a donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Pour déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote verticale, inutile de se fatiguer et de préciser les signes :  $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 = 8$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$ , ce qui nous suffit à connaître l'existence d'une asymptote verticale d'équation  $x = 1$ .

De plus,  $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2x^4}{x^3} = 2x$ , donc  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ . De même,  $\frac{f(x)}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} 2$ , donc  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ .

Reste à calculer  $f(x) - 2x = \frac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \frac{-x^3 - 4x^2 + 6x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$ , qui a pour limite  $-1$  en  $\pm\infty$  (même méthode qu'au-dessus). Conclusion : la droite d'équation  $y = 2x - 1$  est asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

Voici l'allure de la courbe :

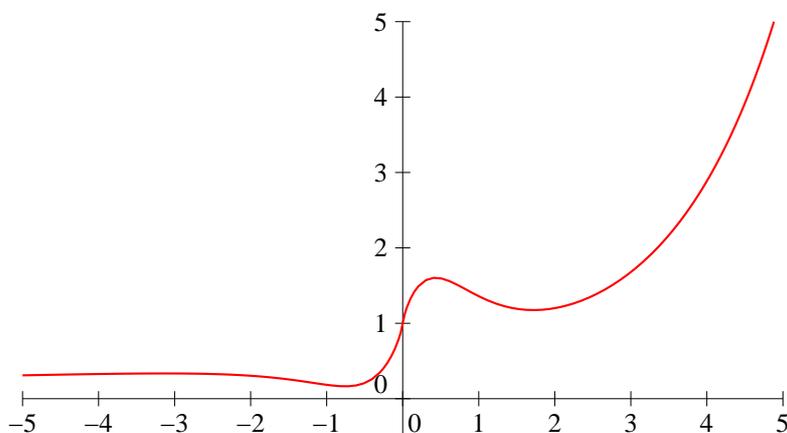


## Étude des branches infinies de $g(x) = \frac{e^x - x \ln |x|}{x^2 + 1}$

Le dénominateur ne s'annulant jamais,  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  (il faut tout de même avoir  $|x| > 0$ ). Quand  $x$  tend vers 0, numérateur et dénominateur convergent vers 1, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0$ , donc il n'y a pas d'asymptote verticale.

Comme on a par ailleurs, en utilisant croissances comparées et équivalents,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ . Il y a donc en  $+\infty$  une branche parabolique de direction  $(Oy)$ . En  $-\infty$ , c'est bien sûr différent, l'exponentielle tendant vers 0. On a cette fois  $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{x \ln(-x)}{x^2} = \frac{\ln(-x)}{x}$ , qui tend vers 0 par croissance comparée. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  en  $-\infty$ .

L'allure de la courbe :



## 1.6 Propriétés supplémentaires

Comme dans le cas des suites, on a des propriétés intéressantes à partir de comparaisons entre fonctions :

**Proposition 1.** Soit  $I$  un intervalle  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur  $I$ ,  $f$  et  $g$  admettant pour limites  $l$  et  $l'$  en  $x_0$  ( $x_0$  étant un élément de  $I$ , une borne de  $I$ , ou un infini) :

- si  $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ , alors  $l \leq l'$ .
- si  $\forall x \in I, f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  et  $l = l'$ , alors  $h$  admet pour limite  $l$  en  $x_0$  (théorème des gendarmes).

Ces résultats restent valables avec des limites infinies.

**Exemple :** On cherche la limite en  $+\infty$  de  $f(x) = \frac{2 \text{Ent}(x) + 5}{\text{Ent}(x) - 2}$ . Partons du fait que  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq \text{Ent}(x) \leq x + 1$ . On a donc  $2x + 5 \leq 2 \text{Ent}(x) + 5 \leq 2x + 7$ , et  $x - 2 \leq \text{Ent}(x) - 2 \leq x - 1$ , donc  $\forall x > 2$  (dans ce cas, tout est positif),  $\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{\text{Ent}(x)-2} \leq \frac{1}{x-2}$ , et en faisant le produit des inégalités (tout est positif si  $x > 2$ ), on a  $\frac{2x+5}{x-1} \leq \frac{2 \text{Ent}(x) + 5}{\text{Ent}(x) - 2} \leq \frac{2x+7}{x-2}$ . Chacun des deux termes encadrant la fonction ayant pour limite 2, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

**Proposition 2.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$  (résultat également valable avec des limites infinies).

## 2 Continuité

### 2.1 Définitions

**Définition 13.** Une fonction  $f$  définie sur  $I$  est **continue en**  $a \in I$  si  $\lim_{x \in a} f(x) = f(a)$ .

**Définition 14.** La fonction  $f$  est **continue à gauche** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ , et **continue à droite** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ . Elle est continue en  $a$  si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en  $a$ .

**Exemple :** On a  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \text{Ent}(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \text{Ent}(x) = 2$ . La fonction partie entière n'est donc pas continue en 2, elle n'y est continue qu'à droite.

**Définition 15.** Une fonction  $f$  est **continue sur un intervalle**  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$ .

**Théorème 1.** Les fonctions usuelles suivantes : polynômes, logarithmes, exponentielles, puissances, valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.

**Proposition 3.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues en  $a$ , alors les fonctions  $f + g$  et  $fg$  sont aussi continues en  $a$ . Si de plus  $g(a) \neq 0$ ,  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues en  $a$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate des propriétés d'opérations sur les limites. De même pour la propriété qui suit, qui découle des compositions de limites.  $\square$

**Proposition 4.** Soit  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $g$  une fonction continue en  $f(a)$  alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

*Remarque 8.* Ces résultats restent bien entendu vrais sur un intervalle. On dira souvent sans plus de détail qu'une fonction obtenue par ces opérations à partir de fonctions usuelles est continue sur son ensemble de définition « par théorèmes généraux ».

**Proposition 5.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $I \setminus \{a\}$  admettant une limite finie  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$ , alors on peut prolonger  $f$  de manière unique en une fonction continue sur  $I$  en posant  $f(a) = l$  (on garde habituellement la même notation pour la fonction prolongée). On parle de prolongement par continuité de  $f$  en  $a$ .

**Exemple :** La fonction  $f : x \mapsto x \ln x$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  mais prolongeable par continuité à  $\mathbb{R}_+$  en posant  $f(0) = 0$ .

### 2.2 Théorème des valeurs intermédiaires et applications

**Théorème 2.** Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a; b]$  et  $c$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , alors il existe  $x \in [a; b]$  tel quel  $f(x) = c$ .

**Corollaire 1.** Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a; b]$ , alors  $f([a; b])$  est un segment. En notant  $m = \min_{[a; b]} f(x)$  la plus petite valeur prise par  $f$  sur  $[a; b]$  et  $M = \max_{[a; b]} f(x)$  la plus grande valeur prise par  $f$  sur  $[a; b]$ , on a donc  $f([a; b]) = [m; M]$ .

*Remarque 9.* Attention, l'hypothèse de continuité est indispensable (par exemple,  $\text{Ent}([0; 5]) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ , seules les valeurs entières sont prises par la fonction), et le fait qu'on soit sur un segment également. La fonction inverse a beau être continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , elle n'y a ni maximum, ni minimum. De plus, il faut se méfier du fait qu'en général  $f([a; b]) \neq [f(a), f(b)]$ . Par exemple, si  $f$  est la fonction carré,  $f([-2; 3]) = [0; 9]$ .

*Démonstration.* On ne fera pas cette démonstration un peu technique, qui utilise d'ailleurs un peu plus que le simple théorème des valeurs intermédiaires.  $\square$

**Corollaire 2.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

*Remarque 10.* La nature de l'intervalle image n'est pas toujours la même que celle de l'intervalle de départ. Ainsi, si  $f$  est la fonction carré,  $f(]-2; 3]) = [0; 9[$ .

### Méthode de dichotomie

**Proposition 6.** Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a; b]$ , telle que  $f(a)f(b) < 0$  (autrement dit,  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signe opposé). On construit deux suites récurrentes  $(a_n)$  et  $(b_n)$  en posant  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$  puis en procédant ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}$ , si  $f(a_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ , on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ; dans le cas contraire on pose  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$ . Les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune  $\alpha$  vérifiant  $f(\alpha) = 0$ . De plus, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ , ce qui majore l'erreur commise en approchant  $\alpha$  par  $a_n$  ou  $b_n$ .

*Démonstration.* Commençons par prouver par récurrence la propriété  $P_n : a_n \leq b_n$  et  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ . Pour  $n = 0$ , on a  $a_0 = a \leq b_0 = b$  et  $b_0 - a_0 = b - a$ , donc  $P_0$  est vraie. Supposons  $P_n$  vraie, on a alors deux cas possibles pour la définition de  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$ . Dans le premier, on a  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} \frac{b-a}{2^n}$  par hypothèse de récurrence donc  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$ . Comme  $a \leq b$ , on a prouvé par la même occasion que  $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ . Dans le deuxième cas,  $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$  et on conclut de la même façon. La propriété est donc vraie pour tout entier par principe de récurrence.

La suite  $b_n - a_n$  étant géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , elle converge vers 0. De plus,  $(a_n)$  est une suite croissante (en effet, soit  $a_{n+1} = a_n$ , soit  $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0$ ), et  $(b_n)$  est décroissante (soit  $b_{n+1} = b_n$ , soit  $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \geq 0$ ). Finalement, les deux suites sont adjacentes et convergent vers une même limite  $\alpha$ .

Reste à prouver que  $f(\alpha) = 0$ , ce que nous ne ferons pas complètement : on prouve que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(a_n)$  est du signe de  $f(a)$  (la construction est faite pour cela) et  $f(b_n)$  du signe de  $f(b)$  (une petite récurrence supplémentaire pour ces propriétés), donc  $f(a_n)$  et  $f(b_n)$  sont toujours de signe contraire. Or, ces deux suites convergent vers  $f(\alpha)$  car  $f$  est continue. Le réel  $f(\alpha)$  doit donc être à la fois positif et négatif, il est nécessairement nul.  $\square$

**Exemple d'utilisation :** On cherche à étudier les variations de la fonction  $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5$ . Cette fonction est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $f'(x) = 4x^3 + 8x + 4 = 4g(x)$ , avec  $g(x) = x^3 + 2x + 1$ . Cette fonction  $g$  est elle-même dérivable et  $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ . La fonction  $g$  est strictement croissante, elle s'annule en un unique réel  $\alpha$ , et  $f$  est donc décroissante sur  $] -\infty; \alpha]$  et croissante sur  $[\alpha; +\infty[$ .

On aimerait déterminer une valeur approchée de  $\alpha$ . Ayons pour cela recours à la dichotomie, mais il faut commencer par trouver un premier encadrement de  $\alpha$ . On constate que  $g(0) = 1$  et  $g(-1) = -2$ , donc la racine de  $g$  se trouve dans l'intervalle  $[-1; 0]$ . On calcule ensuite  $g(-0.5)$ , qui se trouve être négatif, donc  $\alpha \in [-0.5; 0]$ . Puis on calcule  $g(0.25)$ , qui est positif, donc  $g(\alpha) \in [-0.5; -0.25]$ . On sait donc déjà que  $\alpha \simeq -0.375$ , à 0.125 près. On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée. Remarquons que pour obtenir une valeur approchée à  $\varepsilon > 0$  près, il suffit de choisir  $n$  tel que  $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ .

## 2.3 Compléments

**Proposition 7.** Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ . Alors  $f$  est bijective de  $I$  vers  $J = f(I)$  et sa réciproque  $g$  est continue et strictement monotone (de même monotonie que  $f$ ) sur  $J$ .

*Démonstration.* Supposons  $f$  croissante (l'autre cas est très similaire). On sait déjà que  $f(I)$  est un intervalle, et de plus  $f$  est injective car strictement monotone, donc bijective sur son image. La fonction  $g$  est donc bien définie sur  $J$ . De plus, si  $y$  et  $y'$  sont deux éléments de  $J$  tels que  $y < y'$ , on a  $y = f(x)$  et  $y' = f(x')$ , avec  $x < x'$ , donc  $g(y) = x < x' = g(y')$  et  $g$  est strictement croissante. Enfin, soit  $y \in J$ ,  $x = g(y)$  et  $\varepsilon > 0$  (et tel que  $[x - \varepsilon; x + \varepsilon] \subset I$ , sinon il n'y a pas de problème). Notons  $y_1 = g(x - \varepsilon)$ ,  $y_2 = f(x + \varepsilon)$ . Posons  $\eta = \min(y - y_1; y_2 - y)$ . On a alors  $[y - \eta; y + \eta] \subset [y_1; y_2]$ , donc par croissance de  $g$ ,  $g([y - \eta; y + \eta]) \subset [x - \varepsilon; x + \varepsilon]$ . Ceci prouve la continuité de  $g$  en  $y$ .  $\square$

**Exemple :** Considérons la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \ln x + 3x + e^x$ . Cette fonction est continue et strictement croissante (c'est une somme de fonctions croissantes), donc bijective vers  $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ . Sa fonction réciproque  $g$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , et vérifie  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

**Application :** On définit la suite  $(u_n)$  de la façon suivante :  $\forall n \geq 3$ ,  $u_n$  est la plus petite solution de l'équation  $e^x = nx$ . Cette définition est correcte car la fonction  $f_n : x \mapsto e^x - nx$  est continue dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , de dérivée  $f'_n(x) = e^x - n$ , donc admet un minimum global en  $\ln n$ , de valeur  $e^{\ln n} - n \ln n = n(1 - \ln n) < 0$  pour  $n \geq 3$ . L'équation admet donc une solution  $x_n \leq \ln n$  (et accessoirement une deuxième solution supérieure à  $\ln n$ ).

Pour prouver par exemple que  $\forall n \geq 3$ ,  $u_n > 0$ , on constate que  $f_n(0) = e^0 - n \times 0 = 1 > 0$ . Or, par définition,  $f_n(u_n) = 0 < f_n(0)$ . En utilisant le théorème de la bijection (et en fait la partie de la conclusion qui stipule que  $f_n^{-1}$ , qui est définie sur  $[n(1 - \ln n); +\infty[$ , à valeurs dans  $] - \infty; \ln n]$ , est de même monotonie que  $f_n$ ), on peut en déduire que  $u_n > 0$ .

On peut prouver de même que la suite  $(u_n)$  est décroissante :  $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n = e^{u_n} - nu_n - u_n = -u_n < 0$  (on a utilisé le fait que  $f_n(u_n) = 0$ , et que  $u_n > 0$ ). On a donc  $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ , d'où  $u_n > u_{n+1}$  (c'est encore la décroissance de la réciproque qui est utilisée).

La suite étant décroissante minorée, elle converge vers un certain réel  $l$ . Pour déterminer la valeur de  $l$ , il faut revenir à l'équation permettant de définir la suite : puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ , on aura

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} = e^l$ . Or, par définition,  $e^{u_n} = nu_n$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = e^l$ . Ceci n'est possible que si  $l = 0$  (sinon,  $nu_n$  tendrait vers  $+\infty$ ), et on en déduit au passage que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$ , c'est-à-dire que

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$