TD Info n°18 : Intégration numérique

ECE3 Lycée Carnot

10 mai 2012

Pour calculer une intégrale à la main, rien de plus facile, il suffit de maîtriser à la perfection primitives, changements de variables et autres intégrations par parties. La machine, elle, va compenser comme d'habitude son intelligence limitée par une capacité de calcul impressionnante. Nous allons étudier dans ce TD quelques méthodes permettant de calculer des valeurs approchées d'intégrale à l'aide de calculs de sommes, et essayer de comparer ces méthodes entre elles.

Méthode des rectangles

L'idée de cette méthode est assez simple : pour intégrer la fonction f entre a et b, on découpe l'intervalle en n (entier variable) petits segments de même longueur, et on approche l'aire sous la courbe de f sur chacun de ces petits segments par celle d'un rectangle dont la hauteur est égale à l'image par f du point se trouvant le plus à gauche du segment. Cela donne la formule suivante :

$$\int_a^b f(t)\ dt \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Nous retrouverons cette formule dans le cours quand nous parlerons de sommes de Riemann, et nous essaierons de déterminer une marge de l'erreur commise en approchant la valeur de l'intégrale par cette somme. En attendant, écrivez un programme Pascal qui calcule la valeur de $\displaystyle\int_1^e \ln(t)\ dt$ à l'aide de cette méthode (la valeur de n étant choisie par l'utilisateur).

Méthode des trapèzes

Cette fois-ci, on continue à découper l'intervalle d'intégration en n morceaux, mais sur chacun de ces morceaux, on améliore les choses en approchant l'aire sous la courbe par celle du trapèze reliant les deux points extrêmes du segment. Écrire une formule donnant l'approximation de l'intégrale ainsi obtenue, et modifier le programme précédent pour faire le calcul approché de l'intégrale par cette nouvelle méthode.

Méthode de Simpson (rien à voir avec Homer)

Toujours le même principe de base : on découpe en n morceaux, qu'on notera ici pour simplifier $[a_i; a_{i+1}]$. Sur chacun de ces morceaux, on utilisera désormais l'approximation suivante :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\ dt \simeq (a_{i+1} - a_i)\frac{f(a_i) + 4f(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}) + f(a_{i+1})}{6}$$

Écrire un nouveau programme qui calcule toujours la même intégrale, mais par la méthode de Simpson. Et un peu de maths pour finir : démontrer que la méthode de Simpson donne une valeur exacte de l'intégrale quand f est un polynôme du second degré (même pas besoin de découper en morceaux, ça marche dès que $n = 1$).