TD Info n°17 : Suites récurrentes

ECE3 Lycée Carnot

3 mai 2012

Exercice 1

On considère dans cet exercice la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$. L'étude mathématique de la suite montre qu'elle converge vers $\sqrt{2}$ (cf Feuille d'exercices n°15).

1. Écrire un programme Pascal demandant une valeur de n à l'utilisateur et affichant la valeur de u_n.
2. Écrire un programme demandant une valeur de ε à l'utilisateur et déterminant le plus petit entier n pour lequel $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \varepsilon$. Tester le programme avec $\varepsilon = 10^{-5}$. La majoration de l'erreur obtenue par l'IAF lors de l'étude de la suite donnait $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Comparer la valeur de n obtenue avec votre programme avec celle donnée par cette majoration.
3. Écrire un programme demandant une valeur de n à l'utilisateur et affichant la valeur de $\dfrac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$. Tester le programme avec différentes valeurs de n. Peut-on anticiper une limite pour ce quotient quand n tend vers $+\infty$? Que se passe-t-il quand on prend des valeurs de n trop grandes ? Expliquer mathématiquement pourquoi le quotient a effectivement une limite, et préciser sa valeur.

Exercice 2

On considère désormais la suite récurrence définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$. Cette suite converge vers une limite l qui est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{-l} = l$, mais qu'on ne sait pas déterminer explicitement. On veut donc en obtenir une valeur approchée.

1. Écrire un programme donnant une valeur approchée à ε près de l (choisi par l'utilisateur) en utilisant le fait que $|u_n - l| \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
2. Écrire un deuxième programme effectuant le même calcul, mais en utilisant cette fois-ci le fait que $|u_n - l| < \varepsilon$ dès que $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.