Fonctions usuelles

ECE3 Lycée Carnot

23 septembre 2011

Ce deuxième chapitre de l'année constitue un retour sur quelques notions et résultats sur les fonctions usuelles que vous avez pour la plupart déjà vus en lycée. Pour cette raison, mais également parce que nous manquons encore de définitions précises, ce chapitre comportera exceptionnellement peu de démonstrations (elles seront, je vous rassure tout de suite, refaites au cours de l'année). Disons que vous avez là une compilation de choses que nous utiliserons suffisamment souvent pour je considère normal que vous les ayez en permanence en tête.

1 Vocabulaire

1.1 Domaine de définition

Définition 1. Le **domaine de définition** d'une fonction d'une variable réelle est $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$. Sauf mention du contraire, le domaine de définition est constitué de tous les réels pour lesquels $f(x)$ peut être calculé.

Exemples : Les trois cas nécessitant un peu de réflexion à notre niveau sont les suivants :

- annulation d'un dénominateur : si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$.
- positivité sous une racine : si $f(x) = \sqrt{4-2x}$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; 2]$.
- stricte positivité sous un ln : si $f(x) = \ln(x^2-9)$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

1.2 Parité et périodicité

Définition 2. Une fonction réelle f est **paire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. Une fonction réelle f est **impaire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemples : La fonction $f : x \mapsto x^2 + 12$ est paire. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$ est impaire. Plus généralement, toutes les puissances paires sont des fonctions paires, et toutes les puissances impaires sont des fonctions impaires, d'où la terminologie. Il existe évidemment des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires, c'est même le cas la plupart du temps.

Remarque 1. La représentation graphique d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition 3. Une fonction réelle f est **périodique de période** T si, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

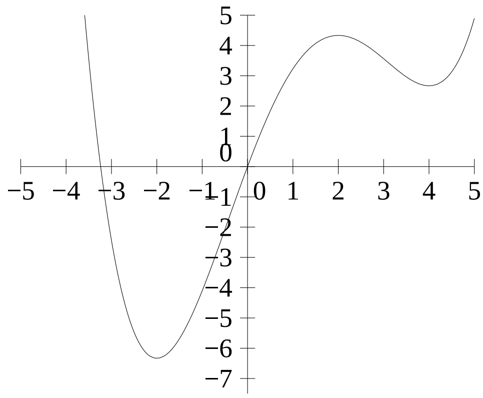
Remarque 2. La représentation graphique d'une fonction périodique de période T est stable par translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses. Nous verrons un exemple de telle fonction plus loin dans ce chapitre.

1.3 Monotonie et bornes

Définition 4. Une fonction réelle f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur un intervalle I si, $\forall (x, y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Je vous épargne les définitions de croissance et décroissance stricte.

Définition 5. Une fonction réelle f admet un **maximum** (local) en x sur l'intervalle I si $x \in I$ et $\forall y \in I$, $f(y) \leqslant f(x)$. On parle de **maximum global** si $I = \mathcal{D}_f$. On définit de même **minimum local et global**.

Exemple : La fonction représentée ci-dessous admet un minimum global en -2, un minimum local en 4, un maximum local en 2 et pas de maximum global.



Définition 6. Le réel m est un **minorant** de la fonction f sur l'intervalle I si $\forall x \in I$, $f(x) \geqslant m$. De même, M est un **majorant** de f sur I si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant M$. On dit que f est bornée sur I si elle y admet à la fois un majorant et un minorant.

Remarque 3. Un minorant n'est pas la même chose qu'un minimum. Par exemple, la fonction carré a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, mais elle est aussi minorée par -2, -15 et tout plein d'autres valeurs. Une fonction peut même être minorée sans avoir de minimum, par exemple la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Variations

Ca paragraphe sera assez court, puisque nous nous contenterons de rappeler quelques propriétés vues au lycée (nous aurons un chapitre entier consacré à la dérivation dans quelques mois). Pour commencer, un petit tableau des dérivées à connaitre sur le bout des doigts :

fonction	dérivée	fonction	dérivée
$u+v$	$u'+v'$	uv	$u'v+uv'$
x^n	nx^{n-1}	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$

Proposition 1. Si f est une fonction dérivable en a, le nombre dérivé $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente en a à la courbe représentative de la fonction f. Plus précisément, cette tangente a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Et comme il n'y a pas que la dérivée dans la vie, rappelons les propriétés suivantes, valables pour des fonctions qui ne sont pas supposées dérivables.

Proposition 2. La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
Si f et g sont de même monotonie sur I et $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est croissante sur I. Si f et g sont de monotonie opposée sur I et $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemple : Il faut faire très attention aux intervalles pour les composées. Prenons $h(x) = (2x-4)^2$. On peut écrire $h = g \circ f$, où f est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$ et g la fonction carré décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f(]-\infty;2]) = \mathbb{R}_-$, et $f([2;+\infty[) = \mathbb{R}_+$, on peut conclure que h est décroissante sur $]-\infty;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$ (ce qui est important ici n'est pas le fait que x soit positif ou négatif, mais bien le signe de $f(x)$, puisque c'est à $f(x)$ qu'on va ensuite appliquer la fonction carré).

3 Logarithmes et exponentielles

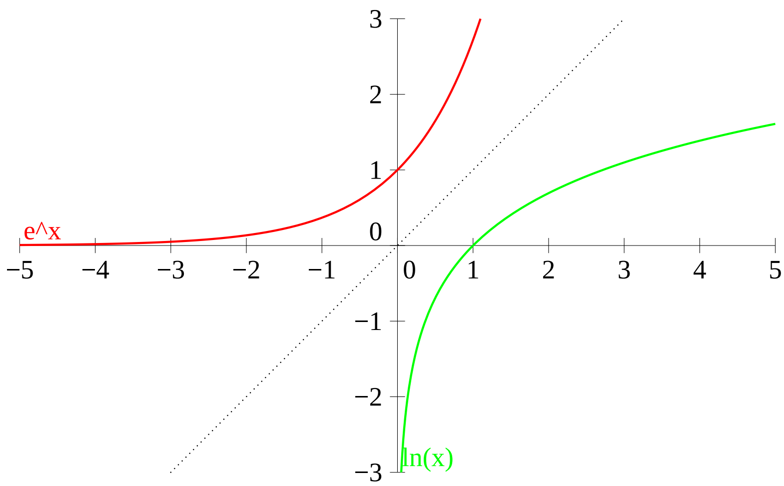
La cohérence des définitions et les résultats de ce paragraphe sont provisoirement admis.

3.1 La fonction logarithme népérien

Définition 7. La fonction **logarithme népérien**, notée ln est l'unique primitive de la fonction inverse définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et vérifiant $\ln 1 = 0$.

Proposition 3. Variations de la fonction ln : La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Voici la courbe représentative du logarithme népérien, ainsi que celle de l'exponentielle :



Proposition 4. Régles de calcul avec la fonction ln : le logarithme népérien transforme les produits en somme et les quotients en différences. On a donc $\forall (x,y) > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$. Cas particulier : $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. Enfin, on a également, découlant de la première formule, $\ln(x^n) = n \ln x$ pour tout entier naturel n.

3.2 La fonction exponentielle

Définition 8. La fonction **exponentielle**, notée $\exp : x \mapsto e^x$ est la réciproque de la fonction ln. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $x = \ln y \Leftrightarrow e^x = y$.

Proposition 5. La fonction exponentielle est dérivable, et elle est sa propre dérivée. Elle est strictement croisssante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Remarque 4. Les courbes de l'exponentielle et du logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition 6. Les régles de calcul avec la fonction exponentielle sont les mêmes que les règles de calcul sur les puissances. Rappelons au passage que $e^1 = e \simeq 2,71$.

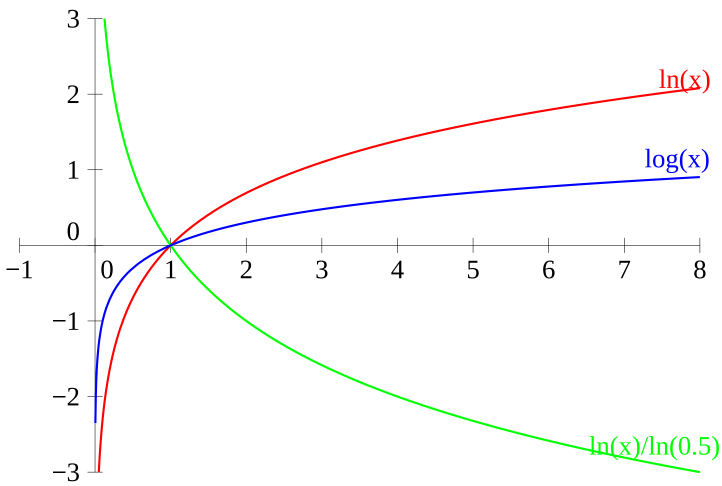
3.3 Logarithmes et exponentielles de base a

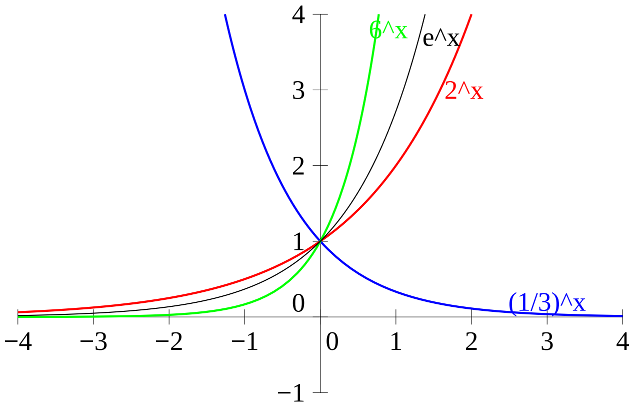
Définition 9. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on définit la fonction **logarithme de base** a sur $]0;+\infty[$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, et la fonction **exponentielle de base** a sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x) = e^{x \ln a}$ (plus simplement noté $\exp_a(x) = a^x$.

Proposition 7. Les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ sont réciproques l'une de l'autre. Elles vérifient les mêmes règles de calcul que ln et exp respectivement. Elles sont toutes deux strictement croissantes sur leur ensemble de définition si $a > 1$, et strictement décroissantes sinon.

Remarque 5. Le logarithme népérien n'est donc rien d'autre que le logarithme de base e. On note habituellement log la fonction logarithme de base 10, aussi appelé logarithme décimal.

Voici quelques exemples de courbes de fonctions logarithmes, puis de fonctions exponentielles :

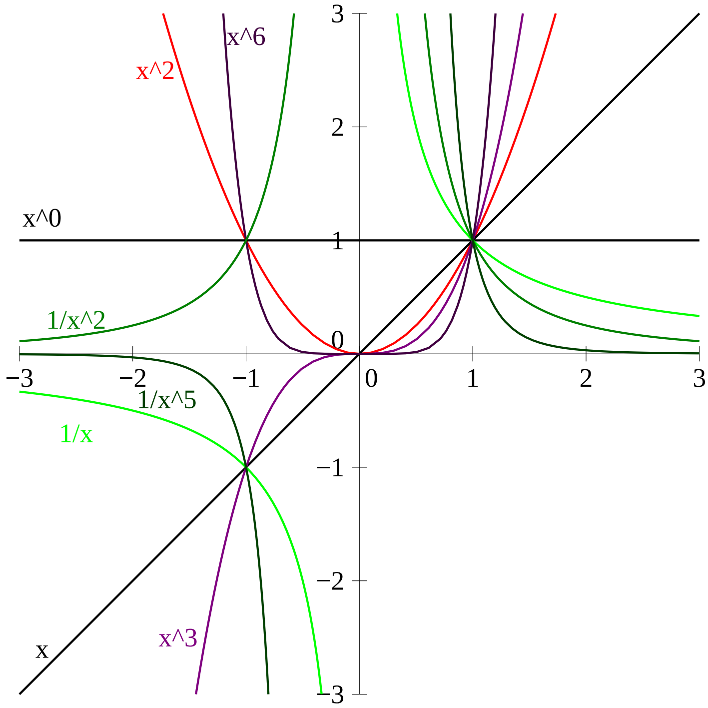




4 Fonctions puissances

4.1 Puissances entières

Pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$. Si n est pair, la fonction f_n est paire. Si n est impair, f_n est impaire. La fonction f_0 est constante égale à 1. Pour n impair, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; pour n pair non nul, f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Si n est un entier négatif, on définit également une fonction puissance sur $\mathbb{R}^*$ par $f_n : x \mapsto x^n$. La parité de ces fonctions est toujours la même que celle de n. Si n est impair, f_n est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (mais ne dites surtout pas qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, on ne parle de monotonie que sur un intervalle). Si n est pair, f_n est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
Voici quelques exemples de courbes de puissances entières :



4.2 Puissances quelconques

À l'aide des fonctions ln et exp, on peut définir des fonctions puissances pour des puissances non entières, mais seulement sur $\mathbb{R}_+^*$:

Définition 10. La fonction f_a est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_a : x \mapsto e^{a \ln x}$. On la note plus simplement $f_a(x) = x^a$.

Proposition 8. Les fonctions puissances sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_a'(x) = ax^{a-1}$. La fonction f_a est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$.

Ces nouvelles fonctions puissances ressemblent en fait beaucoup aux précédentes. Pour la peine, je me dispense de vous donner des exemples de courbes représentatives.

Remarque 6. Si $a \neq 0$, la fonction f_a est réciproque de la fonction $f_{\frac{1}{a}}$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{\frac{1}{n}}$ correspond à la notion de racine n-ième. On a par exemple $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

4.3 Limites classiques

Quelques résultats qui peuvent servir, notamment ceux de croissance comparée, qui sont absolument fondamentaux.

Proposition 9. On a $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Proposition 10. : Croissance comparée des fonctions usuelles en $+\infty$.

- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{(\ln x)^c} = +\infty$
- $\forall a > 1$, $\forall c > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{(\ln x)^c} = +\infty$

Autrement dit, on peut répartir de la façon suivante les fonctions usuelles en $+\infty$, les « plus fortes » étant à droite :
$(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ $\ln x$ $(\ln x)^2$ $(\ln x)^{47}$ $\sqrt{x}$ x x^2 $x^{2436525}$ $1,2^x$ 2^x e^x 12^x

Remarque 7. On peut déduire de ces résultats les autres propriétés suivantes :

- $\forall a > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to -\infty} a^x \times x^n = 0$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $\lim_{x \to 0^+} x^b (\ln x)^c = 0$.

5 Valeur absolue, partie entière

5.1 Équations

Définition 11. La **valeur absolue** d'un réel x est sa distance à 0. Ainsi, une valeur absolue est toujours positive. On peut généraliser ce résultat en remarquant que, pour tous réels x et y, $|x-y|$ représente la distance entre x et y. Cette notion de distance est notamment très utile pour résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des valeurs absolues.

Exemple : Pour résoudre l'équation $|x-2| = 5$, on peut la traduire sous la forme « La distance entre x et 2 est égale à 5 ». Il existe alors deux possibilités pour x : soit x est à distance 5 à droite de 2, autrement dit $x = 2+5 = 7$, soit x est à distance 5 à gauche de 2, autrement dit $x = 2-5 = -3$.
Autre méthode de résolution par le calcul pur : les deux nombres ayant pour valeur absolue 5 sont 5 et -5, donc on a $x-2 = 5$ ou $x-2 = -5$, ce qui donne évidemment les deux mêmes solutions que ce-dessus. Plus généralement :

Proposition 11. L'équation $|x-a| = b$ a toujours deux solutions lorsque $b > 0$ qui sont $a+b$ et $a-b$.

Exemple : Pour résoudre l'inéquation $|x-1| \geqslant 3$, les deux mêmes méthodes sont disponibles. En revenant à la notion de distance, on veut que la distance de x à 1 soit au moins égale à 3, ce qui donne deux zones de solutions possibles, l'une à gauche de -2, l'autre à droite de 4. Autrement dit, $\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[$.
Par le calcul, il faut faire attention à bien écrire les deux inégalités possibles : $x-1 \geqslant 3$ ou $x-1 \leqslant -3$, ce qui donne là-aussi les mêmes solutions. Plus généralement :

Proposition 12. L'inéquation $|x-a| \leqslant b$ a pour solution (lorsque $b > 0$) l'intervalle $[a-b; a+b]$.
L'inéquation $|x-a| \geqslant b$ a pour solution l'union d'intervalles $]-\infty; a-b] \cup [a+b; +\infty[$.

Proposition 13. Deux nombres réels ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

Exemple : Pour résoudre une équation du type $|x^2-4x+5| = |x-1|$, il suffit de considérer les deux équations $x^2-4x+5 = x-1$ et $x^2-4x+5 = 1-x$ et de les résoudre séparément. La première équation x^2-5x+6 a pour discriminant $\Delta = 25-24 = 1$, et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$. La deuxième équation x^2-3x+4 a pour discriminant $\Delta = 9-16 = -7$ et n'admet donc pas de solutions. Finalement, l'équation initiale a donc pour solutions 2 et 3.

Proposition 14. Quelques autres propriétés des valeurs absolues qui peuvent être utiles pour les calculs :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ |-x| = |x|$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| = |x| \times |y|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- **Inégalité triangulaire** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$

Exemple : Certaines équations faisant intervenir « trop » de valeurs absolues et ne pouvant être résolues par les méthodes déjà décrites nécessiteront l'emploi d'une technique proche du tableau de signes, qui consiste, comme pour un vrai tableau de signes, à distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de x, et à essayer d'exprimer l'équation sans valeur absolue dans chacun de ces cas. Considérons par exemple l'équation $|x+2| + |2x-1| + |x-3| = 8$. Nous pouvons faire le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$		$x+2$	
$\lvert 2x-1\rvert$		$1-2x$		$1-2x$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$\lvert x-3\rvert$		$3-x$		$3-x$		$3-x$	0	$x-3$	
$\lvert x+2\rvert + \lvert 2x-1\rvert + \lvert x-3\rvert$		$2-4x$		$6-2x$		$2x+4$		$4x-2$	

Il reste ensuite à résoudre l'équation sur chaque intervalle (donc à résoudre quatre équations), et surtout à vérifier si chacune des solutions obtenues appartiens au bon intervalle. Ici,

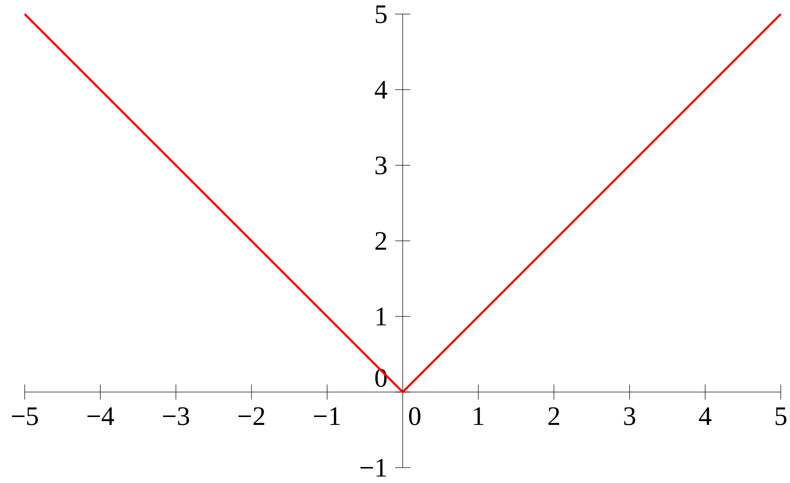
- sur $]-\infty;-2]$, $2-4x = 8$ donne $x = -\dfrac{3}{2}$, solution non valable car strictement supérieure à -2.
- sur $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$, $6-2x = 8$ donne $x = -1$, solution valable.
- sur $\left[\dfrac{1}{2};3\right]$, $2x+4 = 8$ donne $x = 2$, solution valable.
- sur $[3;+\infty[$, $4x-2 = 8$ donne $x = \dfrac{5}{2}$, solution non valable.

Conclusion : $\mathcal{S} = \{-1;2\}$.

5.2 Fonctions

Définition 12. La fonction **valeur absolue** est notée $x \mapsto |x|$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$. La fonction valeur absolue est paire.

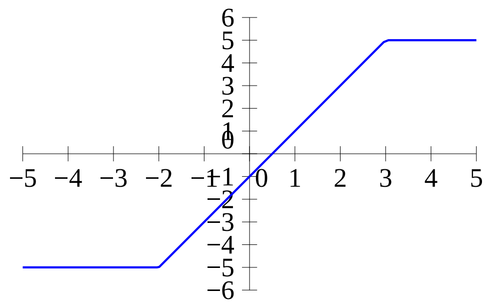
Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue, qui est en fait constituée de par sa définition de deux demi-droites :



Exemple 1 : Dans les cas où les valeurs absolues continuent à poser des problèmes de calcul, il est encore plus prudent, comme pour les équations, de faire des tableaux pour séparer plusieurs cas selon les valeurs de x. Imaginons que nous cherchions à tracer la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+2| - |x-3|$. Trois cas se présentent :

- si $x \leqslant -2$, $x+2$ et $x-3$ sont tous deux négatifs, donc $f(x) = -(x+2)+(x-3) = -5$
- si $-2 \leqslant x \leqslant 3$, $x+2$ est positif et $x-3$ négatif, donc $f(x) = x+2+x-3 = 2x-1$
- enfin, si $x \geqslant 3$, $f(x) = x+2-(x-3) = 5$

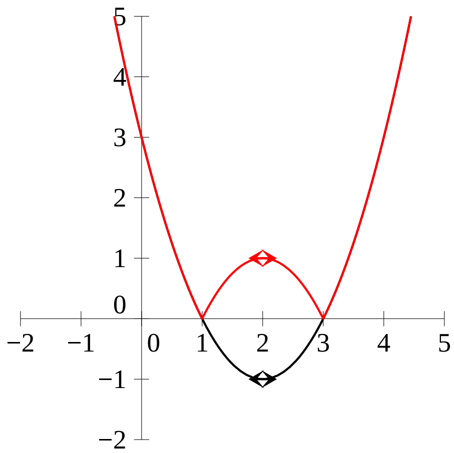
La courbe recherchée ressemble donc à ceci (la fonction est affine par morceaux, sa courbe est une succession de morceaux de droite) :



Exemple 2 : On veut étudier la fonction g définie par l'équation $g(x) = |x^2 - 4x + 3|$. Le plus simple est de commencer par ne pas se préocupper des valeurs absolues et étudier la fonction $h : x \mapsto x^2 - 4x + 3$. On étudiera les variations et le signe de h pour déduire les variations de g. En effet, l'ajout de la valeur absolue est assez simple à gérer : sur les intervalles où h sera positive, elle ne change rien ; et sur ceux où h est négative, son signe et ses variations seront opposées (graphiquement, on effectue une symétrie par rapport à l'axe des abscisses des morceaux de la courbe de h situés en-dessous de cet axe). On peut faire le gros tableau suivant (je vous épargne le calcul de h' et celui des solutions de l'équation $h(x) = 0$) :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
h		$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Et voici les deux courbes, en noir celle de h et en rouge celle de g :



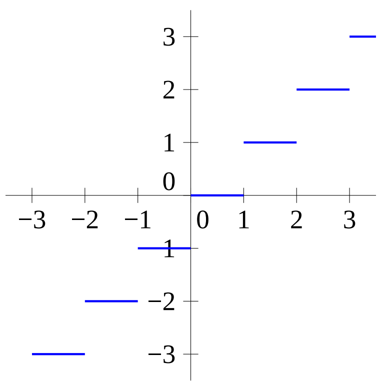
6 Les fonctions partie entière et décimale

Définition 13. La fonction **partie entière** est définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : $Ent(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exemples : $Ent(2,65743565678) = 2$; $Ent(5) = 5$; $Ent(-3,4) = -4$. Autrement dit, la partie entière de x est le seul entier vérifiant $Ent(x) \leqslant x \leqslant Ent(x) + 1$.

Proposition 15. La fonction partie entière est constante par morceaux. Elle est continue sur tous les intervalles de la forme $]n; n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$.

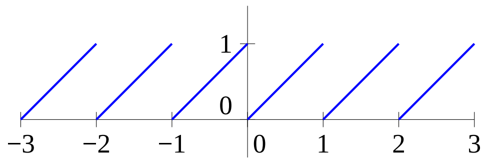
Voici la courbe de la fonction partie entière :



Définition 14. La fonction **partie fractionnaire** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x - Ent(x)$.

Proposition 16. La fonction partie fractionnaire coïncide avec la fonction $x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0; 1[$, et est périodique de période 1. Elle est continue sur tout intervalle de la forme $[n; n+1[$ et toujours positive.

Voici la courbe de la fonction partie fractionnaire :


1
0
−3
−2
−1
0
1
2
3