Feuille d'exercices n°20 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

1er juin 2011

Exercice 1 (*)

1. La probabilité d'obtenir un double six vaut évidemment $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$. Celle d'obtenir au moins un six vaut $\frac{11}{36}$ (soit en utilisant une union, soit en passant par le complémentaire).
2. On a donc $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{36}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{11}{36}\right)$. En particulier, $E(X) = 36$ et $E(Y) = \frac{36}{11}$.
3. Pour avoir $X = n$ et $Y = n$ réalisés simultanément, il faut n'obtenir aucun six lors des $n-1$ premiers lancers, et un double six lors du lancer n, ce qui se produit (les lancers sont indépendants) avec probabilité $\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{36}$.
4. L'évènement $X = Y$ est simplement l'union disjointe des évènements $(X = n) \cap (Y = n)$, donc $P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{n} = \frac{1}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{1}{11}$. Cela n'a rien de surprenant, puisqu'il y a, pour chaque tirage, 11 fois plus de chance de tirer au moins un six que de tirer un double six, autrement dit une chance sur onze que le six intervienne à l'occasion d'un double six.

Exercice 2 (**)

1. On a ici $X(\Omega) = \{2; 3; \ldots\}$ puisqu'il faut attendre deux tirages avant d'avoir pu obtenir un Pile et un Face.
2. Pour avoir $X = n$, il faut tirer pour la première un Pile au tirage n, et donc que des Faces avant (ce qui suppose $n \geqslant 2$, ou le contraire. Chacun de ces deux évènements a pour probabilité $\frac{1}{2^n}$, donc $P(X = n) = 2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.
3. Sous réserve de convergence, $E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 3$ (on reconnait directement une série géométrique dérivée).
4. Commençons par calculer (aucun problème de convergence) $E(X(X-1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8$. On en déduit que $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = 11$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 11 - 9 = 2$.

Exercice 3 (***)

1. La moyenne d'une loi de Poisson est égale à son paramètre, on a donc $P(X=k)=e^{-M}\frac{M^k}{k!}$.
2. Si $j<k$, $P_{X=j}(Y=k)=0$ (on ne peut pas avoir plus de reçus que de candidats !). Sinon, à $X=j$ fixé, le nombre de candidats reçus suit une loi binomiale de paramètre (j,p), donc $P_{X=j}(Y=k)=\binom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k}$.
3. Il faut prendre en compte toutes les valeurs possibles de j (autrement dit appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'évènements formé des $X=j$, pour $j\in\mathbb{N}$), et on obtient $P(Y=k)=\sum_{j=k}^{+\infty}P(X=j)P_{X=j}(Y=k)=\sum_{j=k}^{+\infty}e^{-M}\frac{M^j}{j!}\binom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k}$.
4. Il « suffit » de simplifier l'expression précédente :
$P(Y=k)=e^{-M}p^k\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{M^j}{j!}\frac{j!}{k!(j-k)!}(1-p)^{j-k}=e^{-M}p^kM^k\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{M^{j-k}(1-p)^{j-k}}{k!(j-k)!}$
$=e^{-M}\frac{(Mp)^k}{k!}\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{(M(1-p))^{j-k}}{(j-k)!}=e^{-M}\frac{(Mp)^k}{k!}e^{M-Mp}=e^{-Mp}\frac{(Mp)^k}{k!}$.
On reconnait la forme d'une loi de Poisson, seul le paramètre a changé : $Y\sim\mathcal{P}(Mp)$.

Exercice 4 (***)

Le skieur reprendra la même perche si le nombre de skieurs qui sont passés entre temps vaut $N-1$, $2N-1$, ..., $kN-1$ pour un entier $k\geqslant 1$. Puisque ce nombre de skieurs est censé suivre une loi géométrique X, la probabilité recherchée vaut $\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=kN-1)=\sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{kN-2}=\frac{p}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{kN}=\frac{p}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)^N)^k=\frac{p}{(1-p)^2}\left(\frac{1}{1-(1-p)^N}-1\right)=\frac{p(1-p)^{N-2}}{1-(1-p)^N}$.
Un petit calcul supplémentaire pour vérifier la crédibilité de la formule (calcul qui n'était pas demandé dans l'énoncé) : quand p tend vers 0, ce qui revient à faire tendre l'espérance de la loi géométrique vers $+\infty$, on peut intuitivement s'attendre à ce que notre probabilité tende vers $\frac{1}{N}$ (en effet, si énormément de gens sont passés par le téléski, la valeur de N devient négligeable et toutes les perches tendent à être équiprobables). Et en effet, quand p tend vers 0, le numérateur de notre expression est équivalent à p (le second facteur tend vers 1), et le dénominateur peut se développer à l'aide du binôme de Newton sous la forme $1-(1-Np+o(p))$ (il s'agit d'un polynôme dont les termes prépondérants sont ceux de petits degrés quand p tend vers 0), ce qui donne pour équivalent Np. Le quotient a donc bien comme limite $\frac{1}{N}$.

Exercice 5 (**)

1. Chacune des trois variables suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.
2. C'est un calcul dont on va finir par avoir l'habitude : $P(X_i\leqslant k)=\sum_{j=1}^{j=k}p(1-p)^{j-1}=p\times\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}=1-(1-p)^k=1-q^k$ (avec ici $p=\frac{1}{6}$, mais on continuera les calculs de façon formelle, c'est aussi simple).

3. Comme $X = \max(X_1, X_2, X_3)$, on aura $(X \leqslant k) = (X_1 \leqslant k) \cap (X_2 \leqslant k) = \cap(X_3 \leqslant k)$, d'où en utilisant la supposition d'indépendance $P(X \leqslant k) = (1-q^k)^3$.
4. L'évènement $X = k$ se produit si $X \leqslant k$ est réalisé, mais pas $X \leqslant k-1$, donc $P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = (1-q^k)^3 - (1-q^{k-1})^3 = 1 - 3q^k + 3q^{2k} - q^{3k} - 1 + 3q^{k-1} - 3q^{2k-2} + q^{3k-3} = 3q^{k-1}(1-q) - 3q^{2(k-1)}(1-q^2) + q^{3(k-1)}(1-q^3)$.
5. L'espérance existe, son calcul fait intervenir plusieurs séries géométriques dérivées : $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 3(1-q)kq^{k-1} - 3(1-q^2)k(q^2)^{k-1} + (1-q^3)k(q^3)^{k-1} = 3\frac{1-q}{(1-q)^2} - 3\frac{1-q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{1-q^3}{(1-q^3)^2} = \frac{3}{1-q} - \frac{3}{1-q^2} + \frac{1}{1-q^3}$. Dans le cas qui nous intéresse ici, $q = \frac{5}{6}$, donc $E(X) = \frac{3}{1-\frac{5}{6}} - \frac{3}{1-\frac{25}{36}} + \frac{1}{1-\frac{125}{216}} = 18 - \frac{108}{11} + \frac{216}{81} \simeq 10.85$.

Exercice 6 (EDHEC 1998) (***)

1. L'évenement $X = 2$ se produit si on tire Pile puis Face aux deux premiers lancers, ce qui donne une probabilité $\frac{1}{4}$.
   (a) Pour avoir $X = 3$, il faut avoir Pile et Face aux deuxième et troisième lancers, ce qui réduit les possibilités aux tirages PPF et FPF, pour lesquels on a effectivement $X = 3$. On a donc $P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.
   (b) Constatons qu'à partir du moment où on obtient un Pile, le premier Face qui apparaitra sera précédé d'un Pile. Les seuls possibilités d'avoir $X = k$ sont donc $\underbrace{P\dots P}_{k-1}F$; $F\underbrace{P\dots P}_{k-2}F$; $FF\underbrace{P\dots P}_{k-3}F$; $\dots$; $\underbrace{F\dots F}_{k-2}PF$, soit $k-1$ tirages possibles (le nombre de Pile varie en effet entre 1 et $k-1$).
   (c) Chacun de ces $k-1$ tirages ayant une probabilité $\frac{1}{2^k}$, on a $P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.
   (d) L'événement $X = 0$ se produit si aucun des événements $X = k$ ne se produit. Autrement dit, les événements $X = k$ étant incompatibles, on a $P(X = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)$ (cette dernière série converge nécessairement car elle est majorée par 1). Or, $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^{k-2}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4} \times 4 = 1$. On en déduit que $P(X = 0) = 0$. L'événement $X = 0$ est négligeable.
2. (a) En effet, si le premier Face apparait avant le $k$ème lancer, on aura un PF avant le lancer k, donc $X < k$. Et si on n'a pas de Face du tout, naturellement, $X > k$.
   (b) On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(P1, F1)$: $P(X = k) = P((X = k) \cap P_1) + P((X = k) \cap F_1)$. D'après la remarque précédente, le premier terme vaut $\frac{1}{2^k}$ puisqu'il y a un seul tirage possible. Par contre, pour le deuxième terme, on peut oublier le premier tirage puisque c'est un face, et regarder si on obtient un PF sur les $k-1$ derniers tirages, ce qui se produit avec probabilité $P(X = k-1)$, d'où la relation annoncée.
   (c) Si on multiplie l'égalité précédente par 2^k, on obtient $2^k P(X = k) = 1 + 2^{k-1}P(X = k_1)$, soit $u_k = 1 + u_{k-1}$. La suite u_k est donc bien arithmétique, de raison 1 et de premier terme $u_1 = 0$. On a donc $u_k = k-1$. On en déduit que $P(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}$.

3. C'est un calcul de somme géométrique dérivée seconde, qui converge donc :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} = \frac{1}{4} \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 4.$$