Feuille d'exercices n°20 : Variables aléatoires infinies

ECE3 Lycée Carnot

1er juin 2012

Exercice 1 (*)

On dispose de deux dés équilibrés, et on effectue une suite de lancers simultanés de ces deux dés. On note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier double 6 lors de ces séries de lancers, et Y le rang d'apparition du premier 6 (peu importe qu'il apparaisse sur le premier ou sur le deuxième dé).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un double 6 lorsqu'on lance simultanément deux dés ? Et celle d'obtenir au moins un 6 ?
2. En déduire les lois suivies par X et Y, ainsi que leurs espérances.
3. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P((X = n) \cap (Y = n))$.
4. En déduire la probabilité $P(X = Y)$. Que représente cette probabilité ? Le résultat était-il prévisible ?

Exercice 2 (**)

On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à avoir obtenu au moins une fois Pile et au moins une fois Face. On note X le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Soit $n \geqslant 2$, montrer que les seuls tirages pour lesquels $X = n$ est vérifié sont $P \dots PF$ et $F \dots FP$, et en déduire la loi de X.
3. Vérifier que X admet une espérance, et calculer $E(X)$.
4. Calculer de même $V(X)$.

Exercice 3 (***)

Le nombre X de candidats se présentant à un examen suit une loi de Poisson de moyenne M. Chaque candidat a une probabilité p d'être reçu, indépendamment des résultats des autres candidats. On note Y le nombre de candidats reçus.

1. Rappeler la loi de X.
2. Soit $(j, k) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $P_{X=j}(Y = k)$ (deux cas à distinguer selon la valeur de j).
3. En déduire la valeur de $P(Y = k)$ sous forme d'une somme.
4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4 (***)

Un téléski est constitué de N perches différentes. Un skieur prend une de ces perches, va faire sa descente et revient au même téléski. On admet qu'entre-temps, le nombre de skieurs ayant emprunté le téléski suit une loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité que notre skieur retombe sur la même perche ?

Exercice 5 (**)

On lance trois dés à six faces jusqu'à obtenir trois six, sachant que dès qu'un dé tombe sur 6, on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un 6. On note X_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un 6 sur le premier (et similairement X_2 et X_3 pour les deux autres dés).

1. Quels sont les lois des variables X_1, X_2 et X_3 ?
2. Déterminer $P(X_i \leqslant k)$ pour un entier k donné.
3. Soit X la variable égale au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir les trois 6. Calculer $P(X \leqslant k)$ (on admettra que les évènements $(X_1 \leqslant k)$, $(X_2 \leqslant k)$ et $(X_3 \leqslant k)$ sont indépendants).
4. En déduire la loi de la variable X.
5. Déterminer, si elle existe, l'espérance de X.

Exercice 6 (EDHEC 1998) (***)

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$. On note P_k (respectivement F_k) l'évènement : « on obtient pile (resp. face) au k-ème lancer ».
Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.
2. (a) En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
   (b) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'évènement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ évènements incompatibles.
   (c) Déterminer $P(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   (d) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
3. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2) c : par une autre méthode.
   (a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
   (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que :
   $\forall k \geqslant 3,\ P(X = k) = \dfrac{1}{2}P(X = k-1) + \dfrac{1}{2^k}$
   (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k \geqslant 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.
4. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.