Feuille d'exercices n°16 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

3 avril 2012

Exercice 1 (*)

Le gain du joueur peut être de 1, 2, 3 ou -1 euro. On a donc $X(\Omega) = \{-1; 1; 2; 3\}$. Notons par ailleurs que $|\Omega| = 6^3 = 216$ (on lance trois dés à 6 faces). Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de sortir un nombre de 6 donné pour obtenir la loi de X. Pour obtenir trois 6, il n'y a qu'un tirage possible, soit une probabilité de $\frac{1}{216}$. Pour deux 6, on a le choix du dé qui ne donnera pas un 6 (trois possibilités), ainsi que du chiffre obtenu sur ce dé (cinq possibilités), soit une probabilité de $\frac{3 \times 5}{216} = \frac{15}{216}$. De même, pour un 6, trois choix pour le dé qui donne 6, et cinq choix pour le résultat de chacun des deux dés restants, soit une probabilité de $\frac{3 \times 5^2}{216} = \frac{75}{216}$. Enfin, si on n'obtient pas de 6, on a cinq choix pour chaque dé, soit une probabilité de $\frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$. On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1, et on a donc la loi suivante :

k	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Le reste est du pur calcul : $E(X) = \frac{-1 \times 125 + 1 \times 75 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{216} = -\frac{17}{216} \simeq -0.08$. On perdra donc en moyenne huit centimes d'euros par partie. Ensuite, $E(X^2) = \frac{1 \times 125 + 1 \times 75 + 4 \times 15 + 9 \times 1}{216} = \frac{269}{216}$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{269}{216} - \left(\frac{17}{216}\right)^2 = \frac{57\ 815}{46\ 656} \simeq 1.24$ (soit $\sigma \simeq 1.11$).

Exercice 2 (* à **)

1. Pour déterminer la loi de X_1, peu importe l'ordre dans lequel on a effectué les trois premiers tirages. On peut donc considérer qu'on a tiré simultanément trois boules parmi les six de l'urne, ce qui fait au total $\binom{6}{3} = 20$ tirages possibles. Parmi ceux-ci, un seul ne laisse aucune boule numéro 1 dans l'urne (il faut évidemment tirer les trois boules numéro 1). Symétriquement, un seul laisse trois boules numéros 1 dans l'urne. Pour avoir $X_1 = 1$, il faut tirer deux boules 1 parmi les trois disponibles, et une boule parmi les trois autres, soit $\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$. Le nombre de tirages donnant $X_1 = 2$ vaut également 9 (la situation est en fait symétrique). Soit une loi pour X_1 donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

On calcule ensuite $E(X_1) = \frac{0 \times 1 + 1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 1}{20} = \frac{3}{2}$; puis $E(X_1^2) = \frac{1 \times 9 + 4 \times 9 + 9 \times 1}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10}$ et $V(X_1) = \frac{27}{10} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20}$.

2. Au minimum, il faudra trois tirages pour ne plus avoir de boules 1. Au pire, il en faudra bien sûr six. Pour avoir $X_2 = 3$, il faut tirer les trois boules 1 lors des trois premiers tirages, on a vu plus haut que cela se produisait avec probabilité $\frac{1}{20}$. Pour avoir $X_2 = 4$, il faut tirer deux boules 1 lors des trois premiers tirages (probabilité $\frac{9}{20}$, comme vu à la question précédente), puis lors du quatrième tirage, tirer la dernière boule 1 parmi les trois restantes, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit finalement $P(X_2 = 4) = \frac{9}{20} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$. De même, pour $X_2 = 5$, il faut tirer deux boules 1 et deux autres sur les quatre premiers tirages (proba $\frac{\binom{3}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$) puis tirer la boule 1 au cinquième tirage parmi les deux restantes, soit globalement $P(X_2 = 5) = \frac{3}{10}$. Enfin, on obtient par soustraction ou par un raisonnement direct, $P(X_2 = 6) = \frac{1}{2}$ (il y a une chance sur deux que la dernière boule à tirer soit une numéro 1 puisque la moitié des boules au départ sont numérotées 1). Finalement :

k	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

On peut alors calculer $E(X_2) = \frac{3 + 12 + 30 + 60}{20} = \frac{105}{20} = \frac{21}{4}$; puis $E(X_2^2) = \frac{9 + 48 + 150 + 360}{20} = \frac{567}{20}$, soit $V(X) = \frac{567}{20} - \frac{441}{16} = \frac{63}{80}$.

3. Enfin du facile, X_3 prend toutes les valeurs de 1 à 6 avec probabilité $\frac{1}{6}$ chacune (si vous n'êtes pas convaincus, un peu de formule des probabilités composées devrait suffire à refaire les calculs).

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sans difficulté ici, $E(X_3) = \frac{7}{2}$; $E(X_3^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6}$, soit $V(X_3) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{6}$.

4. On peut obtenir au minimum une somme de 3 en trois tirages, au maximum une somme de 7. Pour obtenir 3, il faut tirer les trois numéros 1, on finit par savoir que la probabilité correspondante vaut $\frac{1}{20}$. Pour avoir 4, il faut tirer deux 1 et un 2, ce qui donne $\binom{3}{2} \times \binom{2}{1} = 6$ tirages possibles (toujours sur 20 au total, bien entendu). Pour le 5, on peut tirer deux 1 et un 3 (trois possibilités), ou bien un 1 et les deux 2 (encore trois possibilités). Pour une somme de 6, il faut un 1, un 2 et un 3 (encore six possibilités), et il reste une unique possibilité pour le 7.

k	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

Soit $E(X_4) = 5$ (la loi est symétrique) ; $E(X_4^2) = \frac{9 + 96 + 150 + 216 + 49}{20} = \frac{520}{20} = 26$ puis $V(X_4) = 26 - 25 = 1$.

5. Au mieux, la somme atteindra 5 en deux tirages (un 3 et un 2). Au pire, ce sera au quatrième tirage (après avoir tiré trois 1, on sera obligé de tirer au moins un 2 lors du quatrième tirage). La probabilité de n'avoir besoin que de deux tirages est $\frac{2}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{15}$; au contraire, pour aller

jusqu'à 4, il faut soit tirer les trois 1 lors des trois premiers tirages, ce qui fait une proba de $\frac{1}{20}$; soit tirer deux 1 et un 2 lors des trois premiers tirages, probabilité $\frac{\binom{3}{2} \times \binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6}{20}$. Finalement, $P(X_5 = 4) = \frac{7}{20}$. Par soustraction, il reste $P(X_5 = 3) = \frac{31}{60}$.

k	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{31}{60}$	$\frac{7}{20}$

Soit $E(X_5) = \frac{16 + 93 + 84}{60} = \frac{193}{60}$; $E(X_5^2) = \frac{32 + 279 + 336}{60} = \frac{647}{60}$ et $V(X_5) = \frac{1\ 571}{3\ 600}$.

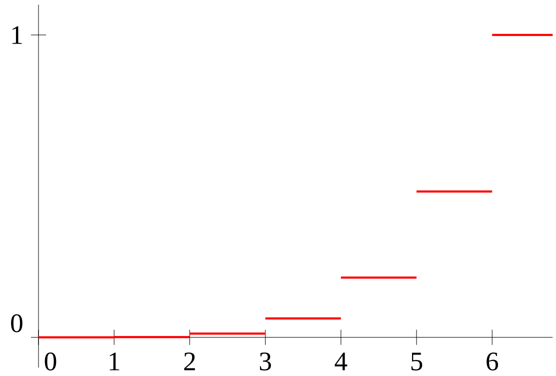
Exercice 3 (**)

On a bien évidemment $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (quand on lance simultanément quatre dés, il est tout à fait possible que le plus grand chiffre obtenu soit 1 puisque les répétitions sont possibles). Notons également que $|\Omega| = 6^4 = 1\ 296$. Plutôt que de calculer directement la loi de X, il est beaucoup plus simple ici de calculer la probabilité des évènement A_i : « Le plus grand chiffre obtenu est inférieur ou égal à i ». En effet, cela revient à dire que chacun des quatre dés a donné un résultat inférieur ou égal à i, ou encore qu'on a i possibilités pour chaque dé. Ainsi, $P(A_6) = \frac{6^4}{6^4} = 1$; $P(A_5) = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1\ 296}$; $P(A_4) = \frac{4^4}{6^4} = \frac{256}{1\ 296}$; $P(A_3) = \frac{81}{1\ 296}$; $P(A_2) = \frac{16}{1\ 296}$ et enfin $P(A_1) = \frac{1}{1\ 296}$. Ensuite, remarquons que l'évènement $X = i$ correspond à avoir A_i réalisé (si le maximum vaut i, il est certainement inférieur ou égal à i), mais pas A_{i-1} (sinon, le maximum sera strictement inférieur à i). Chaque évènement A_{i-1} étant inclus dans A_i, on en déduit que $P(X = 6) = P(A_6) - P(A_5) = \frac{1\ 296 - 625}{1\ 296} = \frac{671}{1\ 296}$, $P(X = 5) = P(A_5) - P(A_4) = \frac{369}{1\ 296}$ etc. Soit la loi suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{1\ 296}$	$\frac{15}{1\ 296}$	$\frac{65}{1\ 296}$	$\frac{175}{1\ 296}$	$\frac{369}{1\ 296}$	$\frac{671}{1\ 296}$

On a donc $E(X) = \frac{1 + 30 + 195 + 700 + 1\ 845 + 4\ 026}{1\ 296} = \frac{6\ 797}{1\ 296} \simeq 5.24$; puis $E(X^2) = \frac{1 + 60 + 585 + 2\ 800 + 9\ 225 + 24\ 156}{1\ 296} = \frac{36\ 827}{1\ 296}$, et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \simeq 0.91$ (soit $\sigma \simeq 0.95$).

Évidemment, tracer la courbe de la fonction de répartition n'est pas extrêmement aisé quand on n'a pas de quoi découper son échelle en 1 296 de façon précise. Ce qui est intéressant ici, c'est que les sauts apparaissant sur cette courbe sont exactement les valeurs des probabilités des évènements A_i calculées un peu plus haut. On verra dans un chapitre ultérieur que, pour calculer la loi d'un maximum, comme ici, il est souvent efficace de passer par la fonction de répartition. Voici tout de même la courbe :



Exercice 4 (***)

1. Comme l'énoncé nous l'a signalé, on aura nécessairement $X \geqslant 2$. On peut par ailleurs prendre toutes les valeurs jusqu'à n inclus (un tirage possible où $X = n$ est $n\,;\, n-1\,;\, \dots\,;\, 4\,;\, 3\,;\, 1\,;\, 2$), donc $X(\Omega) = \{2; \dots; n\}$.
2. Dans le cas où $n = 3$, il n'y a que $3! = 6$ ordres possibles pour les tirages (on considèrera qu'on mène les tirages jusqu'au bout même une fois qu'on a tiré un numéro supérieur au précédent, c'est plus simple). Parmi ces six, il y en a 3 pour lesquels le deuxième numéro est plus grand que le premier : 123 ; 132 et 231, donc $P(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; et donc trois pour lesquels $X = 3$ (on n'aura pas nécessairement un troisième numéro plus grand que le deuxième, mais comme on n'a plus de boule à tirer il faut bien s'arrêter), donc $P(X = 3) = \frac{1}{2}$. L'espérance correspondante vaut $\frac{5}{2}$.

   Dans le cas où $n = 5$, il y a $5! = 120$ tirages possibles. On aura $X = 2$ si on débute notre série de tirages par 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 ou 45 (puis on peut tirer les trois derniers nombres dans n'importe quel ordre), soit $P(X = 2) = \frac{10 \times 3!}{120} = \frac{1}{2}$. On aura $X = 3$ si on commence par 21, 31, 41, 51 (puis n'importe quoi), ou 324, 325, 423, 425, 435, 523, 524, 534, soit $P(X = 3) = \frac{4 \times 3! + 8 \times 2!}{120} = \frac{1}{3}$. On aura $X = 4$, si on débute par 321, 431, 421, 541, 531, 521, et pour les tirages 43251, 54231, 53241, soit $P(X = 4) = \frac{6 \times 2! + 3}{120} = \frac{1}{8}$. Enfin, on aura $X = 5$ pour les tirages 43215, 53214, 54213, 54312, et 54321, soit $P(X = 5) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$. On obtient cette fois-ci une espérance valant $E(X) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \simeq 2.71$.

   Dans le cas général, il va bien falloir trouver une façon intelligente de faire le calcul. Supposons $X = k$, cela signifie qu'on a tiré k numéros dont les $k - 1$ premiers sont apparus en ordre décroissant. Une fois qu'on sait quel est le k-ème numéro tiré, l'ordre du tirage est donc totalement imposé. Or, ce k-ème numéro tiré peut être n'importe lequel des k numéros tirés, sauf le plus petit. Ainsi, si on $X = 4$ et qu'on a tiré les numéros 1, 3, 6 et 8, on a pu tirer dans les trois ordres suivants : 8613, 8316 ou 6318. On a donc $\binom{n}{k}$ choix pour les numéros tirés, $k - 1$ choix pour le numéro qui apparait au tirage k, et $(n - k)!$ choix pour l'ordre des tirages suivant le tirage numéro k. Conclusion $P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}(k-1)(n-k)!}{n!} =$

$\dfrac{k-1}{k!}$. Seule petite exception si $k = n$: il faut ajouter le cas très particulier où on a tiré tous les numéros dans le sens décroissant, ce qui représente un seul cas sur les $n!$ possibles, donc $P(X = n) = \dfrac{\binom{n}{n}(n-1)0! + 1}{n!} = \dfrac{n}{n!}$. On peut désormais calculer l'espérance de X : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k(k-1)}{k!} + n \times \frac{n}{n!}$ (on a séparé le cas particulier signalé auparavant pour rendre le calcul plus simple), soit $E(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{n^2}{n!} = \sum_{k=0}^{k=n-2} \frac{1}{k!} + \frac{n^2}{n!}$.

3. On sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$, et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} = e$ (c'est la somme de la série exponentielle), donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(X) = e$ (eh oui, c'est étonnant mais c'est comme ça).

Exercice 5 (***)

1. Pour chacune des deux pièces, il y a 2^n tirages équiprobables possibles. Parmi ceux-ci, il y en a $\binom{n}{k}$ comportant k Piles (il faut choisir la place des k Piles parmi les n tirages. La probabilité qu'une pièce donne k fois Pile est donc $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$, et les lancers des deux pièces étant indépendants, la probabilité demandée vaut $\left(\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}\right)^2$.

2. On a donc $P(E_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$. On a utilisé la symétrie des coefficients binomiaux pour modifier ce qui se trouve dans la somme, et ainsi reconnaitre un cas particulier de formule de Vandermonde (en reprenant les notations du cours, a et b sont ici égaux à n, et le n du cours à $2n$). On a donc $P(E_n) = \dfrac{1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n}$.

3. Les variables B_k sont les variables indicatrices des évènements E_k. La variable X_n représente le nombre de fois, au cours des n tirages, où les deux pièces se sont retrouvées avec le même nombre de Piles tirés.

4. Par linéarité de l'espérance, et propriété du cours sur l'espérance des variables indicatrices, $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} E(B_k) = \sum_{k=1}^{k=n} P(E_k)$.

5. On a donc $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}$. Essayons de prouver par récurrence la propriété P_n : $E(X_n) = \dfrac{2n+1}{4^n} \dbinom{2n}{n} - 1$. Pour $n = 1$, on a $E(X_1) = \dfrac{1}{4} \dbinom{2}{1} = \dfrac{1}{2}$, et $\dfrac{2n+1}{4^n} \dbinom{2n}{n} - 1 = \dfrac{3}{4} \times 2 - 1 = \dfrac{1}{2}$, ça marche. Supposons donc la formule vérifiée au rang n, on a alors $E(X_{n+1}) = E(X_n) + \dfrac{1}{4^{n+1}} \dbinom{2n+2}{n+1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $E(X_{n+1}) = \dfrac{2n+1}{4^n} \dbinom{2n}{n} - 1 + \dfrac{1}{4^{n+1}} \dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{1}{4^{n+1}} \left(4(2n+1) \dbinom{2n}{n} + \dbinom{2n+2}{n+1} \right) - 1$. Or, $4(2n+$

$1)\binom{2n}{n}+\binom{2n+2}{n+1} = 4(2n+1)\frac{(2n)!}{n!^2}+\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4(n+1)^2(2n+1)!}{(n+1)!^2}+\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)(2n+2)!}{(n+1)!^2}+\binom{2n+2}{n+1} = (2n+3)\binom{2n+2}{n+1}$, ce qui donne exactement la formule souhaitée et achève donc la récurrence.

Exercice 6 (d'après Ecricome 2008) (***)

1. Si $n=0$, on a bien sûr toujours $T_n=0$. Dans le cas contraire, il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N<n$ donc $T_n(\Omega)=\{1;2;\dots;min(n,N)\}$.
2. Après 1 lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans lequel on a lancé la boule), donc $T_1=1$ (variable aléatoire constante). Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2=1$, soit on lance dans une autre et $T_2=2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\frac{1}{N}$, on a $P(T_2=1)=\frac{1}{N}$, et $P(T_2=2)=\frac{N-1}{N}$.
3. Pour avoir $T_n=1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $P(T_n=1)=\left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

   Le nombre de tirages donnant $T_n=2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\binom{N}{2}\times 2^n-2=2^{n-1}N(N-1)-2$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc $P(T_n=2)=\frac{N(N-1)2^n-2}{N^n}$.

   Si $n\leqslant N$, $T_n=n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\dots(N-n+1)$ tirages, soit $P(T_n=n)=\frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n}=\frac{N!}{(N-n)!N^n}$.
   Si $n>N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $P(T_n=n)=0$.
4. Les évènements $T_n=k$ forment un système complet d'évènements, donc on peut écrire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(T_{n+1}=k)=\sum_{i=1}^{i=n}P(T_n=i)P_{T_n=i}(T_{n+1})$.
   Mais parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles : soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $P_{T_n=k}(T_{n+1}=k)=\frac{k}{N}$) ; soit on en avait $k-1$ non vides et on a tiré dans une des $N-(k-1)$ cases restantes : $P_{T_n=k-1}(T_{n+1}=k)=\frac{N-k+1}{N}$. La formule demandée est donc exacte.
5. (a) On a $G_n(1)=\sum_{k=1}^{k=n}P(T_n=k)=1$.

   (b) Calculons : $E(T_n)=\sum_{k=1}^{k=n}kP(T_n=k)$. Or, en dérivant G_n, on obtient $G_n'(x)=\sum_{k=1}^{k=n}kP(T_n=k)x^{k-1}$. En remplaçant par 1, on tombe exactement sur $E(T_n)$, qui est donc égale à $G_n'(1)$.

   (c) Notons pour commencer que la formule de la question 4 reste en fait valable pour $k=n+1$, puis sommons ces égalités :
   $$G_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{k=n+1}P(T_{n+1}=k)x^k=\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(\frac{k}{N}P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)\right)x^k$$

$= \dfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n+1} kP(T_n = k)x^k + (N-k+1)P(T_n = k-1)x^k$

$= \dfrac{x}{N} \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1} + \dfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n} (N-k)P(T_n = k)x^{k+1}$

$= \dfrac{x}{N} G'_n(x) + \dfrac{x}{N} \sum_{k=1}^{k=n} NP(T_n = k)x^k + \dfrac{x^2}{N} \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$

$= \dfrac{x}{N} G'_n(x) + xG_n(x) - \dfrac{x^2}{N} G'n(x)$, ce qui correspond bien à la formule annoncé (les indices disparaissant dans certaines sommes du calcul correspondent à des termes nuls).

(d) Dérivons donc : $G'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}(1-2x)G'_n(x) + \dfrac{1}{N}(x-x^2)G''_n(x) + G_n(x) + xG'_n(x)$. En prenant $x = 1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a $E(T_{n+1}) = -\dfrac{1}{N}E(T_n) + 1 + E(T_n) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$.

(e) Notons $u_n = E(T_n)$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) x + 1$, donnant $x = N$. Posons donc $v_n = u_n - N$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} - N = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) u_n + 1 - N = \dfrac{N-1}{N} u_n - (N-1) = \dfrac{N-1}{N}(u_n - N) = \dfrac{N-1}{N} v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{N-1}{N}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - N = 1 - N$, donc $v_n = (1-N)\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n-1} = -\dfrac{(N-1)^n}{N^{n-1}}$. On en déduit que $u_n = N - \dfrac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = \dfrac{N^n - (N-1)^n}{N^{n-1}} = N\left(1 - \dfrac{(N-1)^n}{N^n}\right) = N\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n$ va tendre vers 0, la parenthèse vers 1, et l'espérance de T_n vers N, ce qui est intuitivement normal.