Feuille d'exercices n°16 : Variables aléatoires finies

ECE3 Lycée Carnot

28 mars 2012

Exercice 1 (*)

On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois, 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le gain du joueur.

Exercice 2 (* à **)

Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2 et la dernière est numérotée 3. On effectue des tirages successifs sans remise de toutes les boules de l'urne. Pour chacune des variables aléatoires suivantes, déterminer la loi, l'espérance et la variance :

1. X_1 est le nombre de boules numérotées 1 présentes dans l'urne à l'issue du troisième tirage.
2. X_2 est le nombre de tirages nécessaires avant de ne plus avoir de boules numérotées 1 dans l'urne.
3. X_3 est le rang du tirage de la boule numérotée 3.
4. X_4 est la somme des numéros tirés lors des trois premiers tirages.
5. X_5 est le nombre de tirages nécessaires avant que la somme des numéros obtenus n'atteigne (ou dépasse) 5.

Exercice 3 (**)

On lance simultanément quatre dés à 6 faces et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X (on pourra commencer par calculer les probabilités $P(X \leqslant k)$, ainsi que son espérance et sa variance. Tracer la courbe de la fonction de répartition de X.

Exercice 4 (***)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant (ce qui suppose qu'on effectue au moins deux tirages ; par exemple une suite de tirage possible est 7, 4, 2, 5 et on s'arrête après ce quatrième tirage). On note X le nombre de tirages effectués.

1. Quels sont les valeurs prises par la variable X ?
2. Déterminer la loi de X puis son espérance (on pourra commencer par traiter les cas $n = 3$ et $n = 5$).
3. Quelle est la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 5 (***)

On lance n fois de suite deux pièces équilibrées et on cherche à déterminer la probabilité de l'évènement E_n : « Les deux pièces ont donné le même nombre de Pile lors des n lancers ».

1. Pour tout entier $k \leqslant n$, déterminer la probabilité que les deux pièces aient donné chacune k Pile en n lancers.
2. En déduire $P(E_n)$ sous forme d'une somme, puis explicitement (penser à la formule de Vandermonde pour calculer la somme).
3. On note désormais, pour tout entier $k \leqslant n$, B_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'évènement E_k est réalisé et 0 sinon ; et $X_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$. Que représentent les variables B_k et la variable X_n ?
4. Exprimer l'espérance de X_n en fonction des réels $P(E_k)$.
5. Prouver par récurrence que $E(X_n) = \dfrac{2n+1}{4}\dbinom{2n}{n} - 1$.

Exercice 6 (d'après Ecricome 2008) (***)

Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant probabilité $\dfrac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases (et les tirages de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases **non** vides après n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.
2. Donner les lois de T_1 et de T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ (en distingant suivant que $n \leqslant N$ ou $n > N$).
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $P(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}P(T_n = k) + \dfrac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)$.
5. On considère dans cette question le polynôme $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k)x^k$.
   (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
   (b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.
   (c) En utilisant la relation démontrée à la question 4, montrer que $G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)$.
   (d) Dériver l'expression précédente et en déduire que $E(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$.
   (e) En déduire la valeur de $E(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.