Feuille d'exercices n°9 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

16 décembre 2011

Exercice 1 (**)

1. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & -12 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ & & -8y & + & 15z & = & 38 \\ & & -4y & + & 16z & = & 36 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ & & -8y & + & 15z & = & 38 \\ & & & - & 17z & = & -34 \end{array}\right.$$

On remonte le système : $z = 2$, puis $-8y = 38 - 15z = 8$, donc $y = -1$, et enfin $x = 13 + 2y - 5z = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; -1; 2)\}$.

2. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ & & -2y & - & 3z & = & -13 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ & & -2y & - & 3z & = & -13 \\ & & & & -4z & = & -12 \end{array}\right.$$

On remonte le système : $z = 3$, puis $-2y = -13 + 3z = -4$, donc $y = 2$, et enfin $x = -6 - y + 3z = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; 2; 3)\}$.

Pour le troisième système, on peut tricher un peu et éviter de recourir au pivot : commençons par soustraire les deux premières lignes : on obtient $-x = 1$, donc $x = -1$. La dernière équation devient alors $2y+2z = 3$, soit $y+z = \frac{3}{2}$. En reportant dans la première équation, on a donc $-1+\frac{3}{2}+t = 2$, soit $t = \frac{3}{2}$. La deuxième équation nous donne la même chose, on a donc $\mathcal{S} = \left\{ \left(-1; y; \frac{3}{2} - y; \frac{3}{2}\right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

4. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -8 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ & & 5y & + & 8z & - & t & = & 4 \\ & & 4y & + & 10z & - & 8t & = & 14 \\ & & 7y & + & 4z & - & 5t & = & 20 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 8L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 5L_2 - L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ & & 5y & + & 8z & - & t & = & 4 \\ & & 36y & + & 54z & & & = & 18 \\ & & 18y & + & 36z & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_3 - 2L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ & & 5y & + & 8z & - & t & = & 4 \\ & & 36y & + & 54z & & & = & 18 \\ & & & - & 18z & & & = & 18 \end{array}\right.$$

Je me suis permis de ne pas triangulariser de façon standard pour avoir des calculs un peu plus simples. On obtient donc $z = -1$, puis $36y = 18 - 54z = 72$, donc $y = 2$; $-t = 4 - 5y - 8z = 2$, donc $t = -2$, et enfin $x = 6 - 2y - 3z + 2t = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; 2; -1; -2)\}$.

Le cinquième système est constitué de deux équations proportionnelles (on a $L_1 = -2L_2$) donc équivalentes. Tout ce qu'on peut faire est exprimer une inconnue en fonction des deux autres, par exemple $\mathcal{S} = \{(x; y; 2x + y - 1) \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$.

6. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & z & = & 2a + b \\ & & y & + & z & = & a - c \end{array}\right.$$

Le système ne peut avoir de solution que si $2a+b = a-c$, c'est-à-dire si $a+b+c = 0$. Dans ce cas, on a $y = 2a+b-z$, et $x = a-2y+z = -3a-2b+3z$, donc $\mathcal{S} = \{(-3a-2b+3z; 2a+b-z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Dans le cas contraire, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 2 (***)

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynome de degré 3. Chacune des conditions imposées se traduit sous forme d'équation linéaire sur les coefficients du polynome : $P(1) = 1 \Leftrightarrow a+b+c+d = 1$; $P(-1) = 1 \Leftrightarrow -a+b-c+d = 1$; et comme $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $P'(1) = 1 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 1$. La différence des deux premières équations donne $a + c = 0$, soit $c = -a$, et la dernière équation devient alors $2a + 2b = 1$, soit $b = \frac{1}{2} - a$. Enfin, la somme des deux premières équations se traduit par $b + d = 1$, soit $d = 1 - b = a + \frac{1}{2}$. On a finalement $\mathcal{S} = \left\{\left(a; \frac{1}{2} - a; -a; a + \frac{1}{2}\right)\right\}$. Un exemple de polynome solution est obtenu en prenant $a = 1$, on a alors $P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$. La solution n'est pas unique, il y a un polynome différent pour chaque valeur possible de a.

Même principe, mais avec un polynome de degré 4, donc de la forme $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. La première équation donne simplement $e = 0$, et les quatre autres se traduisent sous forme d'un magnifique système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 16a & + & 8b & + & 4c & + & 2d & = & 2 \\ 81a & + & 27b & + & 9c & + & 3d & = & 3 \\ 256a & + & 64b & + & 16c & + & 4d & = & 4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 14a & + & 6b & + & 2c & & & = & 0 \\ 78a & + & 24b & + & 6c & & & = & 0 \\ 252a & + & 60b & + & 12c & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \\ L_4 \leftarrow \frac{L_4}{12} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 7a & + & 3b & + & c & & & = & 0 \\ 13a & + & 4b & + & c & & & = & 0 \\ 21a & + & 5b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 7a & + & 3b & + & c & & & = & 0 \\ 6a & + & b & & & & & = & 0 \\ 14a & + & 2b & & & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations étant respectivement équivalentes à $b = -6a$ et $b = -7a$, on en déduit que $a = 0$, puis $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$. Il n'y a donc qu'un polynome vérifiant les conditions imposées : $P(x) = x$ (tout ça pour ça...).

Exercice 3 (**)

Notons a, b, c et d les coefficients respectifs des mathématiques, des langues, du français et d'AEHSC. Le tableau de notes se traduit alors (en divisant tout par 10 pour avoir des coefficients plus sympathiques) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & b & + & 2c & + & d & = & 31 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 30 \\ & & b & + & c & + & 2d & = & 29 \\ & & 2b & + & c & + & d & = & 28 \\ 2a & + & \frac{1}{2}b & + & \frac{1}{2}c & + & \frac{1}{2}d & = & 27 \end{array}\right.$$

Pas besoin d'utiliser le pivot pour résoudre un tel système : $L_1 - L_3$ donne $c - d = 2$, soit $d = c - 2$, et $L_1 - L_4$ donne $c - b = 3$, soit $b = c - 3$. En reportant dans la première équation, on a donc $c-3+2c+c-2 = 31$, soit $c = 9$, dont on déduit que $b = 6$ et $d = 7$. Comme $a+b+c+d = 30$, on a donc $a = 8$, et il ne reste plus qu'à vérifier que la dernière équation est bien satisfaite par ces valeurs (ce qui est heureusement le cas). Les coefficients sont donc 8 pour les maths, 6 pour les langues, 9 pour le français et 7 pour l'AEHSC.

Exercice 4 (***)

1. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow (1-m)L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & - & (1+2m)z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & + & (1-(1-m)(2+m))z & = & 0 \end{array}\right.$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient $(1-(1-m)(2+m)+1+2m)z = 0$, soit $(1-2-m+2m+m^2+1+2m)z = (m^2+3m)z = 0$. Si $m \neq 0$ et $m \neq -3$, on a donc $z = 0$. Ensuite, on a alors $y = 0$ si $m \neq -1$, puis $x = 0$. Il y a trois cas particuliers.

Pour $m = 0$, en gardant les deux premières équations du système triangulaire obtenu, on a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & -y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

soit $y = -z$ puis $x = z - 2y = 3z$, donc $\mathcal{S} = \{(3z; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Pour $m = -3$, en gardant ces mêmes équations, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

soit $y = -\dfrac{5}{2}z$ puis $x = \dfrac{1}{4}(z - 2y) = \dfrac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S} = \{(\frac{3}{2}z; -\frac{5}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Enfin, quand $m = -1$, on a $z = 0$, c'est cette fois-ci la deuxième équation qui est toujours vérifiée, et la première devient $2x + 2y - z = 0$, soit $x = -y$, donc $\mathcal{S} = \{(-y; y; 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

2. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2mx & + & (m-1)y & + & (5-m)z & = & 0 \\ (m-1)x & + & 2my & + & (m+7)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Additionnons les deux équations, on obtient $(3m-1)x + (3m-1)y + 2z = 0$; soustrayons-les et on a $(m+1)x - (m+1)y - 2(m+1)z = 0$. Si $m \neq -1$, la deuxième équation se simplifie en $x - y - 2z = 0$, donc $2z = x - y$, et en reportant dans la première on a $3mx + (3m-2)y = 0$. Si $m \neq 0$, on en déduit que $x = \dfrac{2-3m}{3m}y$, et $z = \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1-3m}{3m}y$, et $\mathcal{S} = \{(\frac{2-3m}{3m}y; y; \frac{1-3m}{3m}y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Si $m = -1$, le système se réduit à l'équation $-2x - 2y + 6z = 0$, donc $\mathcal{S} = \{(x; y; \frac{1}{3}(x+y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Enfin, si $m = 0$, les deux équations sont $-y + 5z = 0$, soit $y = -5z$, et $-x + 7z = 0$, soit $x = 7z$, donc $\mathcal{S} = \{(7z; -5z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

Pour le troisième, quelques petites astuces de calcul évitent de trop se fatiguer :

$$3. \left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ (m-1)x & + & my & + & z & = & 1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m-1 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & & & + & (m-2)z & = & m-2 \\ 2mx & + & 2my & + & mz & = & m \end{array} \right.$$

Si $m \neq 0$, on peut simplifier la dernière équation, puis faire $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (m-2)x & & & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & (m-2)z & = & m-2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Reste à faire $L_1 \leftarrow (m-2)L_2 - 2L_1$, ce qui donne $(m-2)^2 z - 4z = (m-2)^2 - 4$, soit $m(m-4)z = m(m-4)$. Si $m \neq 4$ (on a déjà retiré la valeur 0), on a $z = 1$, d'où on déduit $x = 0$, puis $y = 0$. La seule solution est alors le triplet $(0; 0; 1)$.

Dans le cas particulier $m = 0$, le système est :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ -x & & & + & z & = & 1 \\ x & & & - & z & = & -1 \end{array} \right.$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes et donnent $x = z - 1$, puis la première donne $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S} = \{(z-1; \frac{3}{2} - \frac{3}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Dans le cas particulier $m = 4$, reprenons le système obtenu plus haut :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & & & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

On a alors $x = 1 - z$, et $2y = 1 - 2x - z = -1 + z$, donc $\mathcal{S} = \{(1 - z; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 5 (***)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_5 \leftarrow 4L_1 - L_5 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & - & 3z & + & 15t & - & 3w & = & 36 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & - & y & + & 4z & + & t & - & 5w & = & -3 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_4 - L_3 \\ \\ L_5 \leftarrow 4L_4 + L_5 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\
 & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\
 & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\
 & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\
 & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69
\end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow 21L_2 - 4L_5$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\
 & & 14y & & & & & + & 30w & = & 60 \\
 & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\
 & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\
 & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69
\end{array}\right.$$

Plutôt que de faire un dernier pivot, constatons que la troisième équation donne $3w = 6 - y$, ce qui, reporté dans la deuxième, permet d'obtenir $14y + 10(6 - y) = 60$, soit $4y = 0$. On a donc $y = 0$, puis $3w = 6$ donc $w = 2$; $21t = 69 - 3 \times 2 - 7 \times 0 = 63$ donc $t = 3$; $z = 2 \times 0 + 5 \times 3 + 2 \times 2 - 18 = 1$ et enfin $x = 3 + 0 - 2 \times 1 - 3 \times 3 - 2 = -10$. Le système admet donc une solution unique : $\mathcal{S} = \{(-10; 0; 1; 3; 2)\}$.