Feuille d'exercices n°15 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

27 mars 2012

Exercice 1 (**)

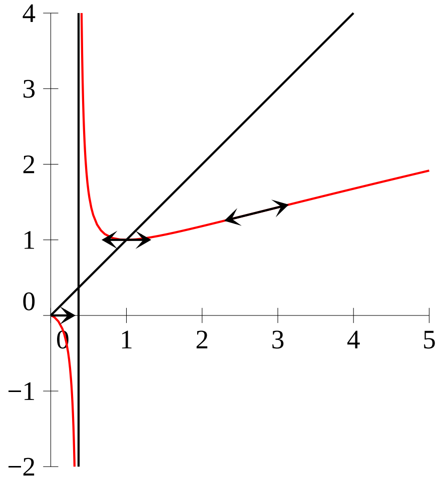
1. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$. Elle admet donc un maximum en $x = 2$, de valeur $f(2) = 1 + \frac{1}{4}(2-4) = \frac{3}{2}$, et est croissante sur $]-\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$. Les points fixes sont déterminés en résolvant l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}(2 - x^2) = 0$, d'où deux points fixes pour $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
2. En effet, si $1 \leq x \leq 2$, $-1 \leq -\frac{1}{2}x \leq -\frac{1}{2}$ et $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Quant à l'image de $[1; 2]$ par f, comme la fonction est croissante sur cette intervalle, elle vaut $[f(1); f(2)] = \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right] \subset [1; 2]$.
3. C'est une récurrence toute simple : $u_0 = 1 \in [1; 2]$, et si $u_n \in [1; 2]$, on a d'après la question précédente $f(u_n) \in [1; 2]$, soit $u_{n+1} \in [1; 2]$. Comme $u_n \in [1; 2]$ et $\sqrt{2} \in [1; 2]$, et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'IAF entre u_n et $\sqrt{2}$ et obtenir $|f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (c'est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$ (par définition), on a bien $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouvons par récurrence $P_n : |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $|1 - \sqrt{2}| \leq 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vraie, on a alors d'après la question précédente $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, et par ailleurs, par hypothèse de récurrence $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$. On peut combiner les deux inégalités pour obtenir $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Cela prouve P_{n+1} et achève la récurrence.
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, et $0 \leq |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \sqrt{2}| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$.
5. On sait que l'inégalité sera vérifiée dès que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$, soit en passant au logarithme $-n \ln 2 \leq -9 \ln 10$, ou encore $n \geq \frac{9 \ln 10}{\ln 2} \simeq 30$. Il faut donc calculer le trentième terme de la suite pour être certain d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près. Remarque : en pratique, on constate que le terme u_{19} est déjà une valeur approchée à 10^{-9} près.

Exercice 2 (**)

1. En effet, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée). De plus, f est dérivable et C^1 sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln x + 1 - 1}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}$, qui a également pour limite 0 en 0 (c'est

par exemple équivalent en 0 à $\frac{1}{\ln x}$). D'après le théorème de prolongement C^1, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

2. On a déjà calculé f', il est donc facile de constater que f est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; 1\right]$, et croissante sur $[1; +\infty[$. On a par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (croissance comparée), et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc il y a une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$ (pas de difficulté non plus, il suffit de constater que $\ln x + 1$ est négatif à gauche de $\frac{1}{e}$ et positif à droite). Les plus courageux calculeront $f''(x) = \frac{1}{x(\ln x + 1)^2} - \frac{2\ln(x)}{x(\ln x + 1)^3} = \frac{1 - \ln x}{x(\ln x + 1)^3}$ (j'ai dérivé le quotient comme le produit de $\ln x$ et de $\frac{1}{(\ln x + 1)^2}$ car c'est un peu plus facile à écrire), et en déduiront que la courbe admet un point d'inflexion pour $x = e$, de hauteur $f(e) = \frac{e}{2}$, et dont la tangente a pour pente $f'(e) = \frac{1}{4}$. On peut ainsi tracer la courbe suivante :



3. Résolvons $f(x) = x$. Si on élimine la valeur 0 (qui est effectivement un point fixe de f), on peut simplifier par x et obtenir $\frac{1}{\ln x + 1} = 1$, soit $\ln x + 1 = 1$, donc $x = 1$. Il y a donc deux points fixes : 0 et 1.

4. (a) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $g'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$. Elle admet donc un maximum en 1, de valeur $g(1) = \frac{1}{4}$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $\forall x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{4}$. Or, on a $f'(x) = g(\ln x)$. Si $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$, et on peut lui appliquer l'inégalité précédente : $0 \leq g(\ln x) \leq \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

   (b) Pour appliquer l'IAF, il faut d'abord vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1; +\infty[$. En constatant que l'intervalle $[1; +\infty[$ est stable par f, on peut le prouver par une simple récurrence : $x_0 = 2 \geq 1$, et en supposant $x_n \geq 1$, on obtient, en utilisant la croissance de f sur $[1; +\infty[$, $f(x_n) \geq f(1) = 1$, donc $x_{n+1} \geq 1$, ce qui achève la récurrence.

   On a donc $1 \in [1; +\infty[$ et $x_n \in [1; +\infty[$. De plus, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ sur $[1; +\infty[$. En appliquant l'IAF, on obtient donc $|f(x_n) - f(1)| \leq |x_n - 1|$, soit $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|$.

Prouvons ensuite par récurrence la propriété $P_n : |x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$. Pour $n = 0$, P_0 stipule que $|2-1| \leq 1$, ce qui est vrai. Supposons ensuite P_n vraie, on obtient alors $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|$ (cf plus haut) $\leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}$ (hypothèse de récurrence), ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

(c) Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, et $0 \leq |x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} |x_n - 1| = 0$, soit $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

Exercice 3 (d'après ESSEC 2002) (***)

1. (a) C'est une équation du second degré, qu'on sait très bien résoudre : $\Delta = 1 + 4 = 5$, $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La deuxième solution est manifestement négative, quant à la première, on peut l'encadrer en partant de $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$, donc $\frac{1}{2} < x_1 < 1$. il y a donc bien une solution unique à l'équation sur l'intervalle $]0;1[$.

   (b) Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, on a $\frac{3}{2} \leq x + 1 \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$. Comme $\frac{2}{3} < 1$, on a a fortiori $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$.

   (c) La fonction f est bien sûr dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$. En reprenant la question précédente, si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$, donc en élevant au carré (tout est positif), $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{4}{9}$, soit $\frac{1}{2} \leq |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

   (d) Commençons par prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$: $u_0 = 1$ appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Supposons désormais que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, on a d'après la question b $\frac{1}{2} \leq f(u_n) \leq 1$, soit $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$, ce qui achève la récurrence.
   Constatons par ailleurs que r_2 est un point fixe de la fonction f : on sait que r_2 vérifie $r_2^2 + r_2 - 1 = 0$, soit $r_2(r_2+1) = 1$, donc $r_2 = \frac{1}{r_2+1}$ ou encore $f(r_2) = r_2$.
   On peut désormais appliquer l'IAF à $z = u_n$ et $y = r_2$, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ (cf questions précédentes), sur lequel on a vu que $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$. On en déduit que $|f(u_n) - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$, soit $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$.
   Montrons enfin par récurrence la propriété $P_n : |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Pour $n = 0$, $|u_0 - r_2| = |1 - r_2| \leq 1$ car $r_2 \in]0;1[$, ce qui prouve P_0. Si on suppose P_n vérifiée, on peut faire le calcul suivant en utilisant successivement le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2| \leq \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Cette dernière inégalité prouve P_{n+1} et achève donc la récurrence.
   Comme $\frac{4}{9} < 1$, la suite $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge vers 0, et le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} |u_n - r_2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = r_2$.

2. (a) Cette fois-ci, on ne sait pas résoudre l'équation, il faut donc étudier un peu le polynome $x^3 + x^2 + x - 1$. Sa dérivée, $3x^2 + 2x + 1$, a un discriminant négatif, elle est donc toujours

positive. La fonction $x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est donc strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}$. Comme elle prend la valeur -1 pour $x = 0$ et la valeur 2 pour $x = 1$, on en déduit qu'elle s'annule entre 0 et 1. L'équation proposée a donc une unique solution (à cause de la bijectivité) qui appartient à l'intervalle $]0;1[$.

(b) Le trinome $x^2 + x + 1$ étant strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$, on aura, si $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$, $f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1} < 1$, on aura bien $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$, donc l'intervalle est stable.

(c) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ayant un discriminant négatif, il ne s'annule jamais), et $g'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; et en dérivant g' comme un produit,

$g''(x) = -\frac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3}$

$= \frac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. Cette dérivée seconde étant toujours positive sur $\left[\frac{1}{3};1\right]$, la dérivée g' y est strictement croissante. Comme $g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}+1}{(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1)^2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \frac{135}{169}$ et $g'(1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, on peut en déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{3};1\right]$, $|g'(x)| \leq \frac{135}{169}$.

(d) On aimerait appliquer l'IAF à $x = r_3$ et $y = v_n$ en utilisant la majoration de $|f'(x)|$ obtenue à la question précente. Il faut pour cela vérifier que v_n est toujours dans cet intervalle, ce qui se fait en utilisant la stabilité de l'intervalle par une récurrence identique à celle du début la question $1.d$; et que $r_3 \in \left[\frac{1}{3};1\right]$ et est un point fixe de g. Comme $\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{14}{27} < 0$, on a effectivement $r_3 \geq \frac{1}{3}$ (cf étude de la question a). De plus, $r_3^3 + r_3^2 + r_3 - 1 = 0 \Rightarrow r_3(r_3^2 + r_3 + 1) = 1 \Rightarrow r_3 = f(r_3)$, donc r_3 est un point fixe de f. On peut donc bien appliquer l'IAF pour obtenir $|f(v_n) - f(r_3)| \leq \frac{135}{169}|v_n - r_3|$, soit $|v_{n+1} - r_3| \leq \frac{135}{169}|v_n - r_3|$.

On fait ensuite notre petite récurrence classique pour prouver que $|u_n - r_3| \leq \left(\frac{135}{169}\right)^n$ (comme dans la question $1.d$, on majore $|v_0 - r_3|$ par 1 en utilisant que $\frac{1}{3} \leq r_3 \leq 1$, et le reste de la récurrence est identique en remplaçant les $\frac{4}{9}$ par des $\frac{135}{169}$).

La conclusion est également la même : $\frac{135}{169} < 1$ donc le membre de droite de notre inégalité tend vers 0, et en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} |v_n - r_3| = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} v_n = r_3$.

3. (a) La fonction h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $h_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$. La fonction h_n étant stricement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle y est bijective. Comme $h_n(0) = -a < 0$ et $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = +\infty$, on en déduit que l'équation $h_n(x) = 0$ a bien une solution (unique par bijectivité) sur $[0;+\infty[$. De plus, on a $h_n(1) = n - a$, donc $h_n(1) > 0$ si $n > a$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, h_n s'annule alors sur l'intervalle $]0;1[$ et $t_n \in]0;1[$.

(b) C'est un simple calcul : $(x-1)h_n(x) = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x^3 + x^2 - ax - x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x + a = x^{n+1} - ax - x + a = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

(c) Notons que $h_{n+1}(x) = x^{n+1} + h_n(x)$. Comme $h_n(t_n) = 0$ (par définition), on a donc $h_{n+1}(t_n) = t_n^{n+1} > 0$, donc $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$. Comme par ailleurs on a aussi, toujours par définition, $h_{n+1}(t_{n+1}) = 0$, on en déduit que $h_{n+1}(t_n) > h_{n+1}(t_{n+1})$. La fonction h_{n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, cela implique $t_n > t_{n+1}$, et la suite (t_n) est donc strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle est donc convergente.

(d) On vient de voir que la suite (t_n) était décroissante, donc $\forall A \geq n$, $0 < t_n \leq t_A$, et comme t_n et t_A sont tous deux strictement inférieurs à 1, $0 < t_n^n \leq t_A^n$. Fixons donc $A \geq a$ (de façon à ce que t_A soit une constante). Comme $t_A < 1$ dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_A^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n^n = 0$.

(e) En reprenant la relation obtenue à la question *b* et en l'appliquant pour $x = t_n$, on obtient $0 = t_n^{n+1} - (a+1)t_n + a$, soit $(a+1)t_n - a = t_n \times t_n^n$. Le membre de droite convergeant vers 0 d'après la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (a+1)t_n - a = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{a}{a+1}$.

4. (a) Tout comme pour la fonction h_n, i_n est dérivable de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc y est strictement croissante et bijective. Comme $i_n(0) = -a < 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} i_n(x) = +\infty$, la fonction s'annule nécessairement une unique fois sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $i_n(1) = n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 - a = \dfrac{n(n+1)}{2} - a$. Si $n(n+1) > 2a$, on aura donc $i_n(1) > 0$, et la fonction i_n s'annulera alors sur $]0;1[$.

(b) Encore du calcul : $(x-1)^2 i_n(x) = (x^2 - 2x + 1)\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k+2} - \sum_{k=1}^{k=n} 2kx^{k+1} + \sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum_{k=3}^{k=n+2} (k-2)x^k - \sum_{k=2}^{k=n+1} (2k-2)x^k + \sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = (n-1)x^{n+1} + nx^{n+2} - 2x^2 - 2nx^{n+1} + x + 2x^2 - a(x-1)^2 = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.

(c) Même chose qu'à la question 3.*c* en constatant que $i_{n+1}(x) = i_n(x) + (n+1)x^{n+1}$, donc $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. On en déduit que $i_{n+1}(y_n) > 0$, soit $i_{n+1}(y_n) > i_{n+1}(y_{n+1})$ puis, par croissance de la fonction i_{n+1}, $y_n > y_{n+1}$. La suite (y_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge.

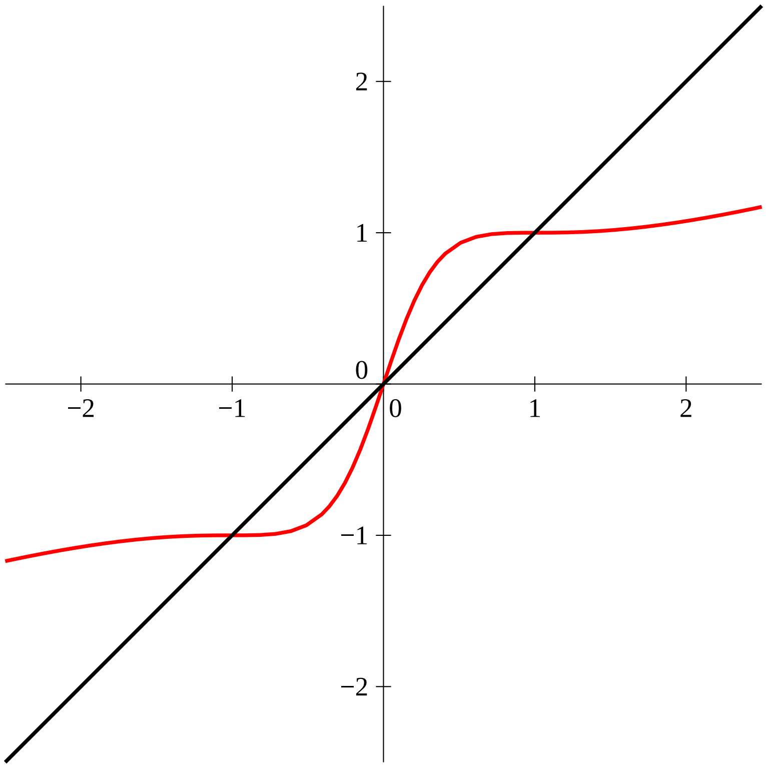
(d) Encore une fois, la décroissance de la suite donne immédiatement l'inégalité, et en fixant A à une valeur convenable, on sait que $y_A < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_A^n = 0$ (un petit coup de croissance comparée ici) et, par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n^n = 0$.

Reprenons alors la relation de la question *b*, appliquée à $x = y_n$, pour en déduire en passant à la limite que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n + a(y_n - 1)^2 = 0$, soit $\beta - a(\beta-1)^2 = 0$, soit $a\beta^2 - (1+2a)\beta + a = 0$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = (1+2a)^2 - 4a^2 = 1 + 4a$, qui est toujours positif, et admet donc deux racines $\beta_1 = \dfrac{1 + 2a + \sqrt{1+4a}}{2a}$, et $\beta_2 = \dfrac{1 + 2a - \sqrt{1+4a}}{2a}$. reste à savoir laquelle des deux valeurs est la bonne. On sait que $0 \leq \beta < 1$. Or, $\beta_1 > 1$ (son numérateur est plus grand que son dénominateur). On a donc $\beta = \dfrac{1 + 2a - \sqrt{1+4a}}{2a}$.

Exercice 4 (***)

Commençons par étudier la fonction f : elle est C^∞, impaire, et $f'(x) = \dfrac{(3x^2+3)(3x^2+1) - 6x(x^3+3x)}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3x^4 - 6x^2 + 3}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cherchons ses points fixes : $f(x) = x$ se ramène, en simplifiant par x (et en notant au passage que 0 est un point fixe), à $\dfrac{x^2+3}{3x^2+1} = 1$, soit $x^2 + 3 = 3x^2 + 1$, donc $2x^2 = 2$, ce qui se produit pour $x = 1$ et $x = -1$.

Il y a donc trois points fixes : $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$. Chacun des quatre intervalles $]-\infty; -1]$; $[-1; 0]$; $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$ est donc stable par f. De plus, la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty; -1]$ et sur $[0; 1]$, et en-dessous sur les deux autres intervalles.



On peut alors deviner le comportement de (u_n) selon les valeurs de u_0 :

- si $u_0 < -1$, la suite sera croissante, majorée par -1, donc convergera. Le seul point fixe de l'intervalle étant -1, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.
- si $u_0 = -1$, la suite est constante égale à -1.
- si $-1 < u_0 < 0$, la suite sera décroissante, minorée par -1, et convergera nécessairement vers -1.
- si $u_0 = 0$, la suite est nulle.
- si $0 < u_0 < 1$, la suite sera croissante, majorée par 1, et convergera vers 1.
- si $u_0 = 1$, la suite est constante égale à 1.
- si $u_0 > 1$, la suite est décroissante, minorée par 1, elle converge vers 1.

Prouvons par exemple la convergence dans le cas où $u_0 \in]0; 1[$ (les autres sont très similaires). La fonction f étant strictement croissante sur $]0; 1[$, on a $\forall x \in]0; 1[$, $f(x) \in]f(0); f(1)[=]0; 1[$. Une récurrence élémentaire permet alors de prouver que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]0; 1[$: c'est vrai pour u_0 par hypothèse, et si $u_n \in]0; 1[$, $f(u_n) \in]0; 1[$, soit $u_{n+1} \in]0; 1[$, ce qui achève la récurrence.

Par ailleurs, on a $f(x) = x\dfrac{x^2+3}{3x^2+1}$. Quand $0 < x < 1$, $0 < x^2 < 1$, donc $0 < 2x^2 < 2$ puis en ajoutant $x^2 + 1$ de chaque côté, $3x^2 + 1 < x^2 + 3$. Tous ces nombres étant par ailleurs positifs, on a alors $\dfrac{x^2+3}{3x^2+1} > 1$, d'où $f(x) > x$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante. Étant majorée par 1, elle converge vers un point fixe de la fonction. Sa limite appartient par ailleurs à l'intervalle $[0; 1]$, donc ne peut être égale qu'à 0 ou 1. On peut exclure 0 car, la suite étant croissante, $u_n \geq u_0$, donc la limite de la suite est supérieure ou égale à u_0 et ne peut donc être nulle. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.