Feuille d'exercices n°15 : suites récurrentes

ECE3 Lycée Carnot

19 mars 2011

Exercice 1 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1; 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, et que $f([1; 2]) \subset [1; 2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-9}$?

Exercice 2 (**)

On considère la fonction f définie sur $]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudiez les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Étudiez sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$, en déduire que $\forall x \in]1; +\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 3 (d'après Essec 2002) (***)

Le but de ce problème est d'étudier numériquement les solutions d'équations du type $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = a$.

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$.
   On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine dans l'intervalle $]0; 1[$ et préciser la valeur de cette racine, qu'on notera désormais r_2.

(b) Montrer que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

(c) Calculer la dérivée f' de f et prouver que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

(d) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$, et en déduire la convergence de (u_n).

2. **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

On considère désormais la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

(a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une unique solution r_3 appartenant à $]0;1[$.

(b) Montrer que l'intervalle $\left[\frac{1}{3};1\right]$ est stable par g.

(c) Calculer les dérivées g' et g'' et déterminer le maximum de $|g'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3};1\right]$.

(d) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Majorer $|v_n - r_3|$ en fonction de n, et prouver la convergence de (v_n) vers r_3.

3. **Racine positive de l'équation** $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$.

On désigne désormais par a un réel strictement positif, et on note, pour tout entier $n \geq 2$, h_n la fonction définie par $h_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

(a) Montrer que sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ possède une unique racine qu'on notera t_n, puis que $t_n \in]0;1[$ si $n > a$.

(b) Montrer que $(x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

(c) Montrer que $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$, et en déduire que la suite (t_n) est strictement décroissante, puis qu'elle converge vers une limite qu'on notera désormais α.

(d) Montrer que, si $A \in \mathbb{N}$, on aura $0 < t_n^n \leq t_A^n$ si $n \geq A$. En déduire, en choisissant $A > a$, que $\lim_{n \to +\infty} t_n^n = 0$.

(e) Exprimer la limite α en fonction de a.

4. **Racine positive de l'équation** $nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0$.

On note dans cette partie $i_n(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a$.

(a) Montrer que l'équation $i_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $]0;+\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $]0;1[$ si $n(n+1) > 2a$. On notera cette solution y_n.

(b) Prouver la relation $(x-1)^2 i_n(x) = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.

(c) Montrer que $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. En déduire la décroissance de la suite (y_n), et sa convergence vers un réel $\beta \in [0;1[$.

(d) Montrer que $0 \leq n y_n^n \leq n y_A^n$ dès que $n \geq A$, où $A(A+1) \geq 2a$. En déduire la limite de la suite $(n y_n^n)$, puis déterminer β en fonction de a.

Exercice 4 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$. Déterminer la nature de la suite (u_n) en distinguant éventuellement plusieurs cas selon la valeur de u_0.