Feuilles d'exercices n°4 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

4 octobre 2010

Exercice 1 (*)

La suite (u_n) vérifie d'après l'énoncé la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{100} \times 1\ 000 = u_n + 30$, c'est donc une suite arithmétique de raison 30 et de premier terme $u_0 = 1\ 000$. On sait alors que $u_n = 1\ 000 + 30n$. De même, la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n + \frac{2}{100} v_n = v_n \times 1,02$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $1,02$ et de premier terme $v_0 = 1\ 000$. Toujours d'après le cours, on a donc $v_n = 1\ 000 \times 1,02^n$. En utilisant la calculatrice, on constate qu'il faut attendre 40 ans pour que le deuxième placement commence à être plus intéressant que le premier.

Si l'épargnant choisit le placement A, il aura doublé son capital lorsque $1\ 000 + 30n = 2\ 000$, soit $30n = 1\ 000$, donc $n = 34$ (on arrondit à l'entier supérieur pour trouver la première année où le capital aura effectivement dépasse 2 000 euros). S'il choisit le placement B, il aura doublé son capital lorsque $1\ 000 \times 1,02^n = 2\ 000$, soit $1,02^n = 2$, donc en passant au ln on obtient $n \ln 1,02 = \ln 2$, soit $n = \frac{\ln 2}{\ln 1,02} \simeq 35,003$. Il devra donc attendre 34 ans pour doubler son capital avec le placement A et 36 ans avec le placement B.

Exercice 2 (**)

Calculons donc $t_{n+1} = \frac{2u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{2 \times \frac{3u_n+1}{2u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+1}{2u_n+4} + 1}$. en mettant au même dénominateur, on peut simplifier les dénominateurs pour obtenir $t_{n+1} = \frac{2(3u_n+1) - 2u_n - 4}{3u_n + 1 + 2u_n + 4} = \frac{4u_n - 2}{5u_n + 5} = \frac{2(2u_n - 1)}{5(u_n + 1)} = \frac{2}{5} t_n$. La suite (t_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $t_0 = \frac{2u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{2}$. On en déduit que $t_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Ne reste plus qu'à obtenir u_n en fonction de t_n : $t_n(u_n + 1) = 2u_n - 1$, soit $t_n u_n + t_n = 2u_n - 1$, donc $t_n + 1 = 2u_n - t_n u_n$ puis $u_n(2 - t_n) = t_n + 1$. Finalement, on obtient $u_n = \frac{t_n + 1}{2 - t_n} = \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{2}{5})^n + 1}{2 - \frac{1}{2} \times (\frac{2}{5})^n} = \frac{2^n + 2 \times 5^n}{4 \times 5^n - 2^n}$.

Exercice 3 (***)

Les deux conditions peuvent se traduire de la façon suivante : $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$, et $2b - a = 3c - 2b = q$. La première relation revient à dire que $b = aq$ et $c = bq = aq^2$, d'où en remplaçant dans la deuxième donne $2aq - a = 3aq^2 - 2aq (= q)$, d'où $3aq^2 - 4aq + a = 0$, soit en factorisant par a qui est supposé non nul $3q^2 - 4q + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet deux racines réelles $q_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, et $q_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. Si $q = 1$, la condition $2aq - a = q$

donne $a = 1$, puis $b = aq = 1$ et $c = bq = 1$; et si $q = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{2}{3}a - a = \frac{1}{2}$, soit $a = -\frac{3}{2}$, puis $b = \frac{1}{3}a = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{6}$. Les deux seules possibilités sont donc d'avoir $a = b = c = q = 1$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont 1, 1 et 1, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont 1, 2 et 3) ; ou $q = \frac{1}{3}$, donc $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{6}$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{6}$, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont $-\frac{3}{2}$, -1 et $-\frac{1}{2}$).

Exercice 4 (***)

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2u_n + 2n^2 - n + an^2 + 2an + a + bn + b + c = 2u_n + (a+2)n^2 + (2a+b-1)n + a + b + c$. Pour que (v_n) soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = 2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $a + 2 = 2a$, $2a + b - 1 = 2b$ et $a + b + c = 2c$, ce qui donne successivement $a = 2$, puis $b = 2a - 1 = 3$, et enfin $c = a + b = 5$. Avec ces valeurs, la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 + 5 = 7$. Conclusion de ces calculs : $v_n = 7 \times 2^n$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$.

Exercice 5 (**)

Vérifions donc que (v_n) est arithmético-géométrique : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2u_n}{3 \times 3^n} + \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$. La suite est donc arithmético-géométrique, il ne reste plus qu'à calculer son terme général. L'équation de point fixe associée est $x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, qui a pour solution $x = 1$. On introduit donc la suite auxiliaire $w_n = v_n - 1$. Verifions que cette troisième suite est géométrique : $w_{n+1} = v_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(v_n - 1) = \frac{2}{3}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 1 = \frac{u_0}{3^0} - 1 = -1$. Conclusion de nos calculs : $w_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis $v_n = w_n + 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$, et enfin $u_n = 3^n v_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3^n - 2^n$.

Exercice 6 (**)

Vérifions donc ce qu'on obtient en calculant $w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n + v_n) + \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n = u_n + v_n$, donc la suite (w_n) est constante, égale à son premier terme $u_0 + v_0 = 3$. De même, on remarque que $t_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}v_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n = \frac{1}{2}t_n$, donc la suite (t_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$. Conclusion, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2^n}$, soit $u_n = v_n + \frac{1}{2^n}$. Comme on sait par ailleurs que $u_n + v_n = 3$, on peut remplacer u_n pour obtenir $2v_n + \frac{1}{2^n} = 3$, soit $v_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, puis $u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 7 (**)

En notant u_n le capital de notre apprenti boursier après n jours de spéculation, l'énoncé se traduit par la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n - 30) \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}u_n - 45$ donc la suite (u_n) est arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = \dfrac{3}{2}x - 45$, ce qui donne $x = 90$. En posant $v_n = u_n - 90$, on a donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = \dfrac{3}{2}u_n - 135 = \dfrac{3}{2}(u_n - 90) = \dfrac{3}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 90 = 10$. On en déduit que $v_n = 10 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, puis $u_n = 90 + 10 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. Notre ami a bien fait de quitter l'ECE, il fera fortune puisque la suite (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$. Il deviendra millionnaire lorsque $u_n \geqslant 10^6$, soit $10 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \geqslant 10^6 - 90$, ou encore $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \geqslant 10^5 - 9$, donc en passant au ln, $n \ln \dfrac{3}{2} \geqslant \ln 99\ 991$, soit $n \geqslant \dfrac{\ln 99\ 991}{\ln \frac{3}{2}} \simeq 28.4$. Il lui faudra seulement 29 jours pour devenir millionnaire.

La question subsidiaire est en fait facile si on a bien compris le mécanisme des calculs effectués. Si on change le capital initial, la seule modification intervient au moment du calcul de $v_0 = u_0 - 90$. Si ce nombre v_0 reste positif, on aura toujours une suite (u_n) croissante et tendant vers $+\infty$. Au contraire, si v_0 devient négatif, la suite va être décroissante, et ce sera la ruine assurée pour le parieur. Il faut donc un capital initial supérieur à 90 euros pour faire fortune.

Exercice 8 (***)

La suite (u_n) n'est évidemment pas une suite classique, mais peut le devenir si on arrive à transormer le produit en somme et à se débarasser de la racine carrée. Il existe un bon outil pour celà : le logarithme népérien. Mais il serait d'abord bon de vérifier que la suite est bien définie et, pour pouvoir mettre des ln partout, que tous ses termes sont strictement positifs. C'est une récurrence double assez immédiate : u_0 et u_1 sont strictement positifs par hypothèse, et en supposant u_n et u_{n+1} strictement positifs, $u_n u_{n+1}$ le sera aussi, donc u_{n+2} également.

On peut donc introduire la suite auxiliaire $v_n = \ln u_n$. On a alors $v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln \sqrt{u_n u_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\ln(u_n u_{n+1}) = \dfrac{1}{2}(\ln u_n + \ln u_{n+1}) = \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{2}v_{n+1}$. La suite v_n est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = \dfrac{1}{4} + 4 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$. La suite (v_n) a donc un terme général de la forme $v_n = \alpha + \beta\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. Les coefficients α et β sont déterminés à l'aide des premiers termes de la suite : $v_0 = \ln u_0 = \ln 1 = 0$, et $v_1 = \ln 4 = 2\ln 2$. On en déduit que $\alpha + \beta = 0$, soit $\beta = -\alpha$, et $\alpha - \dfrac{1}{2}\beta = 2\ln 2$, soit $\dfrac{3}{2}\alpha = 2\ln 2$, donc $\alpha = \dfrac{4}{3}\ln 2$, et donc $\beta = -\dfrac{4}{3}\ln 2$. On en déduit que $v_n = \dfrac{4}{3}\ln 2\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$, puis $u_n = e^{v_n} = 2^{\frac{4}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n)}$.

Exercice 9 (*)

1. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 4x - 6$, ce qui donne $x = 2$. On pose donc $v_n = u_n - 2$, et on vérifie que la suite auxiliaire est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 6 - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2)$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$. On a donc $v_n = -4^n$, puis $u_n = v_n + 2 = 2 - 4^n$.

2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{2} = 2$ et $s = \frac{3-1}{2} = 1$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.
3. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \frac{6}{2} = 3$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha \times 3^0 = 0$ et $(\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \frac{1}{3}$, d'où $u_n = \frac{1}{3} n 3^n = n 3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geqslant 1$).
4. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$. On ne sait donc pas calculer le terme général de cette suite. On peut toujours calculer les premiers termes pour voir s'il se passe quelque chose d'intéressant : $u_2 = 0$, $u_3 = -\frac{1}{2}$, $u_4 = -\frac{1}{4}$, $u_5 = \frac{1}{8}$, $u_6 = \frac{3}{16}$. C'est pas vraiment gagné pour trouver une forme générale pour u_n...
5. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $3x^2 - 4x + 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux racines $r = \frac{4+2}{6} = 1$, et $s = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. On en déduit la forme générale de la suite : $u_n = \alpha + \frac{\beta}{3^n}$. En utilisant les valeurs des deux premiers termes, on a $u_0 = \alpha + \beta = 2$ et $u_1 = \alpha + \frac{1}{3}\beta = \frac{10}{3}$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{2}{3}\beta = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}$, soit $\beta = -2$, puis $\alpha = 4$. On a finalement $u_n = 4 - \frac{2}{3^n}$.

Exercice 10 (**)

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $u_n > 2$ (ce qui prouvera au passage que (u_n) est bien définie puisqu'on aura alors toujours $u_n \neq 2$). La propriété P_0 est manifestement vraie. Supposons maintenant P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n > 2$. On a alors $u_n - 2 > 0$, donc $\frac{1}{u_n - 2} > 0$, puis $\frac{1}{u_n - 2} + 2 > 2$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, P_n est vérifiée pour tout entier n.
2. D'après la question précédente, on a toujours $u_n - 2 > 0$, ce qui prouve la bonne définition de v_n.
3. Calculons donc $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 2) = \ln\left(\frac{1}{u_n - 2} + 2 - 2\right) = \ln\left(\frac{1}{u_n - 2}\right) = -\ln(u_n - 2) = -v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $v_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln 2$, d'où $v_n = (-1)^n \ln 2$, puis $u_n = e^{v_n} + 2 = e^{(-1)^n \ln 2} + 2$. En fait, on aura $u_n = 2 + 2 = 4$ pour toutes les valeurs paires de n, et $u_n = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ pour toutes les valeurs impaires de n (on parle de suite périodique, comme pour les fonctions, pour une suite reprenant ainsi toujours les mêmes valeurs).

Exercice 11 (***)

Remarquons que, en décalant la relation de récurrence, $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$. En soustrayant cette relation à celle donnée dans l'énoncé, on obtient $u_{n+1} - u_n = u_n + u_{n-1}$, soit $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$. C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, elle admet donc deux racines réelles $r = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et $s = \dfrac{1-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$. Le terme général de la suite (u_n) est donc de la forme $u_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$, avec en utilisant les deux premiers termes, $\alpha + \beta = u_0 = 1$, et $\alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) = u_1 = u_0 = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha\sqrt{2} - \beta\sqrt{2} = 0$, donc $\alpha = \beta$, ce qui en reprenant la première équation mène à $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$. Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n$ (ce n'est pas évident au premier abord, mais tous les termes de cette suite sont bel et bien entiers, malgré la présence de ces $\sqrt{2}$ dans la formule du terme général).